ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MEKANİK ANABİLİM DALI

KOMPOZİT PLAKLARDA SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE GERİLME ANALİZİ

Şemsettin TEMİZ

Yönetici: Doç. Dr. Adnan ÖZEL

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

Benzer yükleme koşullarında çok tabakalı kompozit plakların elastik davranışı, takviye edilmemiş metal plakların davranışından farklıdır. Bu farklılık esasen, homojen malzemelerde olmayan, matris ve fiber katmanları arasındaki iç etkileşimden oluşur. Ayrıca kompozit malzemelerden imal edilmiş tabakalı plaklar için analitik çözümler, izotropik malzemeler için kullanılan klasik analiz yöntemlerinden tamamen farklıdır ve özel bilgi gerektirir. Gerilme dağılımlarının belirlenmesinin analitik yöntemlerle zor olduğu durumlarda, sayısal bir çözümleme olan sonlu eleman yöntemi kullanılabilir.

Bu çalışmada deliksiz tek tabakalı izotropik ve ortotropik, delikli tek tabakalı ortotropik, delikli ve deliksiz çok tabakalı ortotropik düzgün ve sinüsoidal üstten basınçlı yüklemede elastik gerilme analizi sonlu eleman yöntemiyle yapılmıştır. Bunun için sekiz düğümlü düzlem izoparametrik eleman özellikleri kullanılarak bilgisayar programı yazılmıştır. Hesaplamalar bu program kullanılarak çeşitli kompozit malzemelerde ve çelik üzerinde denenmiştir. Sonuçlar tablo ve grafikler halinde sunulmuş ve literatürle karşılaştırılmıştır. Delikli plaktaki gerilme dağılımlarının, deliksiz plaktaki dağılımdan tamamen farklı olduğu saptanmıştır. Her iki plakta da elastik gerilmeler, 1. tabakadan 2. tabakaya geçerken uyumlu olarak azaldığı gözlenmiştir.

SUMMARY

The elastic behavior of laminated plates is different from that of unreinforced metallic plates under similar loading conditions. This is primarily caused by the interaction between the matrix and the fiber layers, which leads to constraint hardening effects that are absent in plasticity of homogeneous materials. Furthermore, analytical techniques for components manufactured from composite materials are entirely different from conventional methods of analysis used for isotropic materials and require specialist knowledge. In order to determine stress distribution, whilst the analytical solutions are not efficient enough, the finite element method is increasingly used.

In this work, the stress analysis of isotropic and ortotropic laminae both with hole and without hole and laminated both with hole and without hole composite plates have been examined using the finite element method. In order to solve the problem, a computer program has been written by using characteristics of eight node isoparametric plane element. The calculations have been tested on various composite and steel materials by this program. The results have been shown in diagrams and tables and compared with literature. It has been found that the stress distribution in the plate with hole was totally different than the plate without hole. The analysis have showed that, the elastic stresses have been gradually reduced as moving from the first layer to the second.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince her türlü yardımlarını benden esirgemeyen ve sürekli olarak bana yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Adnan ÖZEL'e teşekkürü bir borç bilirim. Yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Sadri ŞEN'e , Uzman Murat D. AYDIN'a, tüm hocalarıma ve bölümümüzdeki araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür eder saygılar sunarım.

Erzurum-1998 Şemsettin TEMİZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
SUMMARY	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER	vii
1. **GİRİŞ**	1
2. **PLAK TEORİSİ**	7
2.1. İnce Plaklar	7
2.1.1. Tanımlama	7
2.1.2. Varsayımlar	7
2.1.2.1. Plak Geometrisi Yönünden	7
2.1.2.2. Malzeme Yönünden	8
2.1.2.3. Hesapları Birleştirme Yönünden	8
2.1.3. Diferansiyel Geometri	9
2.1.4. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları	11
2.1.5. Gerilme-Yer Değiştirme Bağıntıları	12
2.1. 6. Gerilmelere Bağlı Olarak Momentlerin Bulunması	13
2.2. Plaklarda Kayma Şekil Değişimi	16
2.2.1. Mindlin Teorisi	16
3. **KOMPOZİTLERİN MAKROMEKANİK DAVRANIŞLARI**	20
3.1. Ortotropik Tabakalarda Düzlem Gerilme Durumu	20
3.2. Mekanik Davranışın Yöne Bağlı Olarak Değişimi	21

3.3. Çok Tabakalı Kompozit Malzemeler 25
3.3.1. Çok Tabakalı Kompozit Malzemelerin İstiflenme Geometrisi 25
3.3.2. Klasik Laminasyon Teorisi 26
3.3.3. Tek Bir Tabakanın Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısı 26
3.3.4. Çok Tabakalı Bir Levhada Gerilme Şekil Değiştirme Bağıntısı 27
3.3.5. Bir Levhaya etkiyen Bileşke Kuvvetler ve Momentler 31
3.3.6. Tabakalı Kompozitlerde Kayma Şekil Değişimi Hesabı 35
3.4. Bazı Özel Levhaların Rijitlik Matrisleri 36
3.4.1. Tek Bir İzotropik Tabakadan Oluşan Levha 36
3.4.2. Tek Bir Ortotropik tabakadan Oluşan Levha 37
3.4.3. Çok Tabakalı Simetrik Levha 38

4. **SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU** 40

4.1. Ara Yüzeylerde Süreklilik 40
4.2. Sonlu Elemanların Formülasyonu 41
4.3. Sonlu Eleman Şekil Fonksiyonları 42
4.3.1. Tek Boyutlu Elemanlarda Şekil Fonksiyonları 43
4.3.2. İki Boyutlu Elemanlarda Şekil Fonksiyonları 45
4.4. Nümerik İntegrasyon 49

5. **PLAKLARIN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU** 52

5.1. Temel Bağıntılar 52
5.2. Sekiz Noktalı İzoparametrik Eleman 55
5.2.1. Gerilme ve Şekil Değiştirmelerin Sonlu Eleman Formülasyonu 56
5.2.2. Elemanın Direngenlik Matrisinin Hesaplanması 57
5.2.3. Elemanın Noktasal Yük Vektörü 61
5.2.4. Tabakalı Plakın Sonlu Eleman Formülasyonu 62

6. **PROBLEMİN TANIMI** 64

7. **SONUÇLAR** 66

8. **TARTIŞMA** 79

PROGRAM AKIŞ ŞEMASI 82

KAYNAKLAR 83

KISALTMALAR VE SİMGELER

A	: Alan
dx, dy	: Boyutlar
h	: Plak kalınlığı
[B]	: Şekil değiştirme -Yer değiştirme dönüşüm matrisi
[C]	: Elastisite Matrisi
E	: Elastisite Modülü
G	: Kayma Modülü
J	: Jakobyen operatörü
[K]	: Direngenlik Matrisi
L	: Lagrange interpolasyon polinomu
[N]	: Şekil Fonksiyonları
[Q]	: Kuvvet vektörü
$W_{i,j}$	: Ağırlık faktörü
u, v, w	: Lokal yer değiştirmeler
U, V	:Yer değiştirme interpolasyon fonksiyonu
$\{\delta\}$	: Yer değiştirme vektörü
x, y, z	: Kartezyen koordinatlar
$[\varepsilon]$	: Şekil değiştirme vektörü
$[\varepsilon_o]$	: Başlangıç şekil değiştirme vektörü
θ	: Takviye açısı
θ_x, θ_y	: Ortayüzey normalinin x ve y eksenleri etrafında toplam dönme
ϕ_x, ϕ_y	: Ortayüzey normalinin kayma gerilmelerinden dolayı x ve y ekseni etrafında dönme
σ	: Normal gerilme
τ	: Kayma gerilmesi
γ	: Kayma şekil değiştirme
ν	: Poisson oranı

1. GİRİŞ

Malzemeler genellikle metaller, seramikler ve organik malzemeler olarak üç ana gruba ayrılırlar. Bu üç grubun birbirlerine göre üstün ve zayıf yönleri vardır, Tablo 1.1. dayanım ve tokluk özellik çiftinin en uygun olduğu grup olan metaller makine mühendisliğinde en yaygın olarak kullanılan malzeme türüdür.

Bu üç ana grubun yanında, aynı ya da farklı gruplardan iki ya da daha fazla malzemenin uygun olan özelliklerini tek malzemede toplamak, ya da yeni bir özellik ortaya çıkarmak amacıyla makro düzeyde birleştirilmesi ile oluşturulan malzemeler, kompozit malzemeler olarak adlandırılır. Atomsal veya molekülsel düzeyde birleştirilen malzemeler makroskobik olarak homojen olduklarından kompozit malzeme olarak sınıflandırılamazlar.

Tablo 1.1. Metal, seramik ve plastik malzemelerin bazı özelliklerinin karşılaştırılması.

Malzeme Grubu	Yoğunluk	Dayanım	Tokluk	Isıl Kararlılık	Biçimlendirme	Birleştirme
METALLER	Orta Yüksek	Orta	İyi	Orta	Orta	Orta
SERAMİKLER	Düşük Yüksek	Yüksek	Düşük	Yüksek	Köyü	Kötü
PLASTİKLER	Düşük	Düşük	Düşük	Düşük	İyi	İyi

Kompozit malzemelerin avantajı bileşenlerinin en iyi özelliklerini bir araya getirmesidir. Kompozit malzemelerin üretimiyle aşağıdaki özelliklerin biri veya birkaçının geliştirilmesi amaçlanır;

-Dayanım,
-Yorulama dayanımı,
-Aşınma dayanımı,
-Korozyon dayanımı,
-Kırılma tokluğu,
-Yüksek sıcaklık özellikleri,
-Isıl iletkenlik,
-Elektrik iletkenliği,
-Akustik iletkenlik,
-Rijitlik,
-Ağırlık,
-Fiyat,
-Estetik görünüm vs.

Bu sayılan özelliklerin hepsi aynı anda iyileşmez ve zaten buna gerek de yoktur. Bileşenlerinin özellikleri bilinen bir kompozit malzemenin, bazı özellikleri hesaplanarak bulunabilir (yoğunluk, elastik özellikler gibi). Bazı özellikler için ise bu mümkün değildir (yorulma dayanımı, tokluk vb.). Tasarımcı bu durumda emniyetli davranarak emniyet katsayılarını çok yüksek seçmek zorunda kalır ve kompozit malzeme kullanımı ekonomik olmaktan çıkabilir.

Günümüzde çok gelişmiş olan bu malzemeler, aslında binlerce yıldan beri kullanılmaktadır. Örneğin çamur içine karıştırılan saman çöpleri ile yapılan kerpiç, bir kompozit malzemedir. Ok yayı yapılırken üst üste konulan, özellikleri ve lif yönleri farklı ağaç levhalar kompozit bir levha oluşturur. Ayrıca kompozit malzemeler doğada da değişik biçimlerde bulunmaktadır (ahşap malzemeler, kemik vs.).

Kompozit malzeme üretiminin bilinçli olarak ele alınması ve bilimsel yaklaşımlarla yeni Malzemelerin geliştirilmesi ancak 1940'lı yıllarda cam takviyeli plastiklerin kullanımı ile

başlamıştır. Önemli ilk uygulamalara örnek olarak radar kubbeleri gösterilebilir. Cam takviyeli plastikler elektromanyetik geçirgenlik, hafiflik, atmosfer koşullarına dayanıklılık ve mekanik özellikleri nedeniyle bu amaç için kullanılabilecek en uygun malzemedir. İlk CTP tekne 1942' de yapılmıştır, ilk elyaf sarma patenti ise 1946'da A.B.D.' de alınmıştır. 1950'lerde ise uçak pervaneleri kompozit malzemeden yapılmaya başlanmıştır. Bugün uçak endüstrisinde % 30' a varan oranlarda kullanılan kompozit malzemelere örnek olarak, çeşitli polimerler (plastikler) içerisine gömülmüş karbon lifleri, alüminyum içerisine dizilmiş boron lifleri veya 1000° C üzerindeki sıcaklıklarda çalışan ve nikel alüminyum alaşımı içerisinde oluşturulmuş nikel-noibyum levhaları ile kuvvetlendirilen malzemeler gösterilebilir. Bu üstün nitelikli kompozit malzemelerin yanında ucuzluğu ve elde edilmesi oldukça kolay olan cam fiber-polyester malzeme oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Verilen örneklerden de anlaşılacağı üzere kullanılacak kompozit malzeme istenen mekanik özellikler, çevre şartlarına dayanıklılık, görünüm, maliyet ve benzeri özellikler ile çok çeşitli olabilmekte ve hemen hemen her şartı karşılayabilecek uygun bir takviye matris çifti oluşturulabilmektedir.

Bu malzeme gurubu hava ve uzay endüstrileri yanında kara ve deniz taşımacılığı, çeşitli spor malzemeleri, tıp gereçleri, robot yapımı, kimya sanayi, elektroteknik ve elektronik ve müzik aletleri yapımı gibi birçok uygulama sahası bulmuş durumundadır. Sıralanan bu uygulamalarda kompozit malzemeler geleneksel bazı malzemelerle yarış halindedir. Tablo 1.2'de kompozit malzemeler geleneksel malzemelerle mekanik özellikleri bakımından karşılaştırılmaktadır.

Yükleme koşulları aynı olsa bile çok tabakalı kompozit plakların elastik davranışı, takviye edilmemiş plakların davranışından farklıdır. Homojen malzemelerde olmayan, matris ve fiber katmanları arasında iç etkileşim bu farklılığa sebep olmaktadır. Ayrıca kompozit malzemelerden imal edilmiş çok tabakalı plaklar için analitik çözümler izotropik malzemeler için kullanılan klasik analiz yöntemlerden tamamen farklıdır ve özel bilgi gerektirir.

Bu problemlerin analizi ilk etapta klasik laminasyon ve kayma şekil değişimi teorisine göre yapılmıştır. Kalın tabakalı plakların anizotropik özelliğinden ve Young modülüne oranla kayma modülünün düşük olmasından dolayı kayma şekil değişimi etkisi önem

Tablo 1.2. Bazı kompozit ve geleneksel malzemelerin mekanik özellikler bakımından karşılaştırılması.

Malzeme	Yoğunluk g/cm^3	Çekme dayanımı MPa	Elastiklik Modülü GPa	Özgül çekme dayanımı $\sigma_ç / \rho$	Özgül elastisite Modülü E / ρ
Alaşımsız çelik	7.1	459	203	58	26
Alüminyum	2.8	84	71	30	25
Al alaşımı 2024	2.8	247	69	88	25
Pirinç	8.5	320	97	38	11
Ahşap (kayın)	0.7	110	13	157	19
Kemik	1.8	138	26	75	14
Bor-Epoksi	1.8	1600	224	889	124
Karbon-Epoksi	1.6	1260	218	788	136
Kevler-Epoksi	1.4	1400	77	1000	55
S camı-Epoksi	1.8	1400	56	824	33
E camı-Epoksi	1.8	1150	42	639	23

kazanmaktadır. Bu teoriler kalın tabakalı plakları açıklamada yeterli olmamaktadır. Bundan dolayı son yıllarda kalın plak probleminin çözümü için çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Lo et al (1977), kalın homojen izotropik ve tabakalı plakların gerçek davranışları için yüksek mertebe teorisini geliştirmiştir. Bu teori ile yer değiştirmeleri kuvvet serilerinin açılımı cinsinden ifade etmiştir. Murthy (1981), plak kalınlığı doğrultusundaki normal

gerilmeleri ihmal ederek Lo et al'ın yer değiştirme modelini basite indirgemiştir [1] ,[2] ,[3].

Reissner (1975), ince plakların çözümü için kullanılan klasik laminasyon teorisine kayma şekil değişimi etkisini de katarak ince plakların gerçek çözümünü vermiştir [4].

Reddy (1984), plakın üst ve alt yüzeyinde kalınlık doğrultusundaki sıfır kayma gerilmesi şartını sağlayan ve kayma düzeltme faktörünü kullanmadan kayma şekil değişimi etkisini hesaplayan yüksek mertebe teorisini geliştirdi. Diaz-Contreras ve Nomura (1996), Green fonksiyonunu kullanarak Mindlin plakları için yeni bir çözüm geliştirdi [5], [6].

Aköz ve Uzcan (1992, 1996) Gateaux diferansiyelini kullanarak basit mesnetlenmiş dikdörtgen Reissner plak problemini çözdü. Daha sonra bu metodu Winkler temeline dayandırarak farklı sınır şarları için çözüm geliştirdi [7],[8].

Paul ve Rao, (1988, 1993) yüksek mertebe kayma şekil değişimi teorisini kullanarak tek delikli ve iki delikli tabakalı plak problemini çözerek delik çaplarının gerilme artışı üzerindeki etkisini inceledi [9],[10].

Ali (1994) yaptığı çalışma ile sonlu eleman tekniğinin tabakalı kompozit yapılara uygulanmasını göstermiştir. [11]

Karakuzu et al, (1997) kenarında "U" şeklinde çentik bulunan plaklarda çentik çapının gerilme yığılmasına etkisini inceledi [12].

Bu çalışmada birinci mertebe teorisi kullanılarak deliksiz izotropik ve tek tabakalı ortotropik, delikli tek tabakalı ortotropik, delikli ve deliksiz tabakalı [0°/90°/90°/0°] kompozit plaklarda ünifom ve sinüzoidal üstten basınçlı yüklemede elastik gerilme analizi sonlu eleman yöntemiyle yapılmıştır. Bunun için sekiz düğümlü düzlem izoparametrik eleman özellikleri kullanılarak bilgisayar programı yazılmıştır. Hesaplamalar bu program kullanılarak çeşitli kompozit malzemelerde ve çelik üzerinde denenmiştir. Delikli

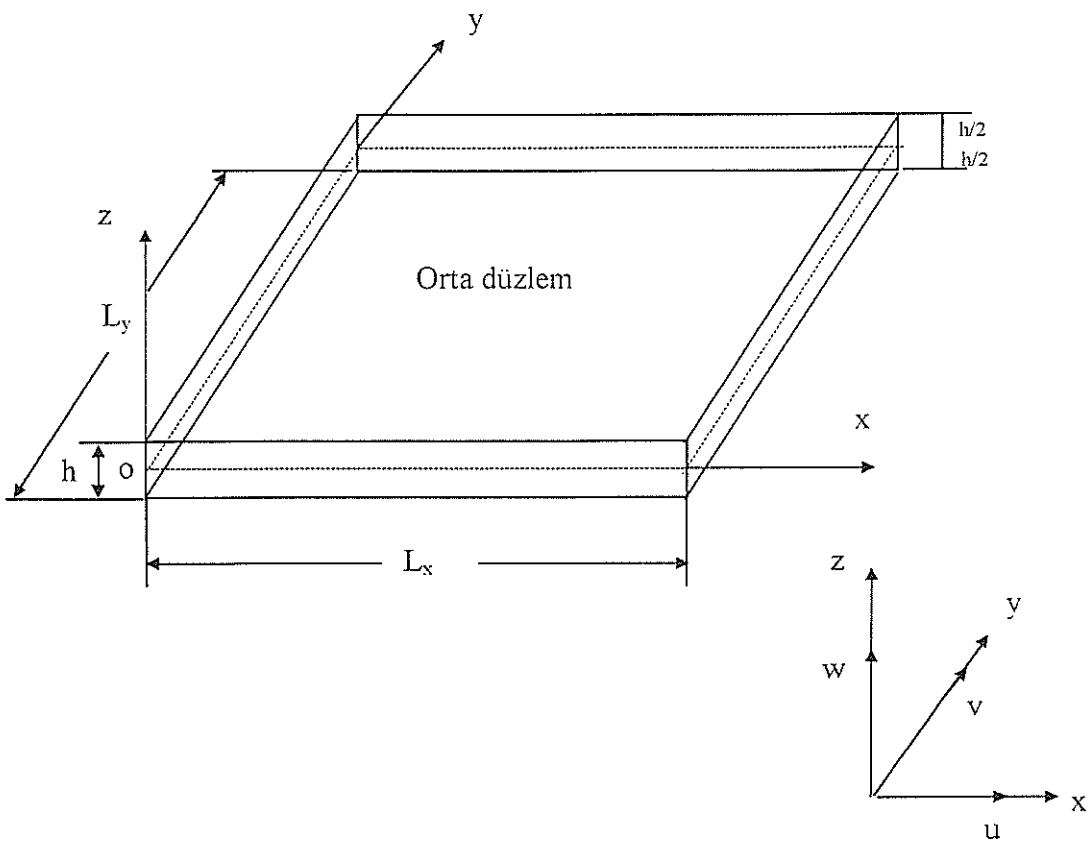
plaklarda çözümler değişik delik çapları için yapılarak delik çapının gerilme dağılımı üzerine etkisi araştırılmıştır. Sonuçlar tablo ve grafikler halinde gösterilmiş ve literatürle karşılaştırılmıştır.

2. PLAK TEORİSİ

2.1. İnce Plaklar

2.1.1. Tanımlama

Kalınlığı, taşıyıcı boyutların yanında çok küçük ve orta düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlem taşıyıcı sistemlere "plak" denir.



Şekil 2.1. Plak, koordinat eksenleri ve deplasmanlar.

2.1.2. Varsayımlar

2.1.2.1. Plak Geometrisi Yönünden

a) Plak kalınlığı diğer boyutların yanında çok küçüktür.

b) Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.

c) Yükler orta düzleme diktir.

d) Çökmeler plak kalınlığı yanında çok küçüktür. w<<h

2.1.2.2. Malzeme Yönünden

Malzeme homojen (her noktada aynı fiziksel özelliklere sahip), izotrop (her doğrultuda aynı davranışı gösteren), belirli sınırlar içinde Hook kanununa uyan lineer-elastik bir malzemedir.

2.1.2.3. Hesapları Birleştirme Yönünden

a) Şekil değişiminden önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normali, şekil değişiminden sonra meydana gelen elastik yüzeyin o noktadaki normali olarak kalır. Yani şekil değişiminden önce, orta düzlemin bir noktadaki normali üzerinde bulunan bir nokta , şekil değişiminden sonra da elastik yüzeyin o noktadaki normali üzerinde bulunur. Bu çubuk sistemlerdeki Bernouilli-Navier hipotezine karşı gelen Kirchhoff-Love hipotezidir.

b) Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri yok sayılabilecek kadar küçüktür. Gerçekte plakta üç doğrultuda (uzay) gerilme durumu söz konusudur. Fakat plakın herhangi bir (x_o, y_o) noktasında σ_z'in h yüksekliğince değişimi incelenirse;

$\sigma_z = \sigma(x_o, y_o, z)$ $\quad z = -h/2$ için $\quad \sigma_z = -p$

$\quad z = h/2$ için $\quad \sigma_z = 0$

p birim alana gelen yüktür. Bu durumda σ_z değeri σ_x ve σ_y yanında çok küçüktür ve $\sigma_z \approx 0$ alınabilir.

c) $\varepsilon_z \approx 0$ alınabilir. Çünkü elastisite teorisinden bilinir ki;

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \sigma_z \approx 0 \quad \text{ve} \quad \nu = 0.10\text{-}0.35 \qquad (2.1)$$

Bu durumda z doğrultusundaki boy değişimleri, yok sayılabilecek kadar küçük olur. Demek ki şekil değişimi sırasında plak kalınlığının değişmediği kabul edilir.

w = w(x,y) olur.

d) Kesitin orta düzleminde şekil değişimi yoktur. Birim boy ve açı değişimleri yaklaşık sıfırdır.

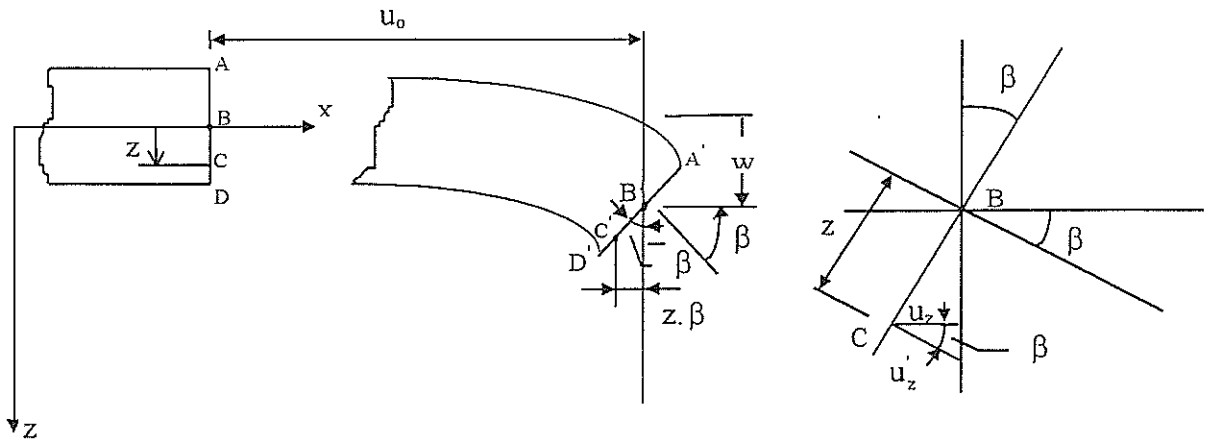
$$\left(\varepsilon_x\right)_{z=0} \approx 0 \qquad \left(\varepsilon_y\right)_{z=0} \approx 0 \qquad \left(\gamma_{xy}\right)_{z=0} \approx 0$$

$$(u)_{z=0} \approx 0 \qquad (v)_{z=0} \approx 0 \qquad (w)_{z=0} \neq 0 \qquad (2.2)$$

Plak problemine ilk adım, plağa etkiyen yükler ile bunun sonucu olan şekil değiştirmeler arasındaki diferansiyel bağıntının çıkartılmasıdır.

2.1.3. Diferansiyel Geometri

Bu bölümde, diferansiyel geometri yardımıyla, şekil değiştirme-yer değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntılar çıkarılacaktır.



Şekil 2.2. Plağın yer değiştirmesi.

Bir plağı şekil değişiminden evvel ve şekil değişiminden sonra y=sabit düzlemiyle keselim (Şekil 2.2).

Plağın x doğrultudaki eğimi $tg\beta \approx \beta \approx \frac{\partial w}{\partial x}$ olacaktır.

Şekil 2.2'den $tg\beta = \frac{u'_z}{z}$,

$$u'_z = z.\ tg\beta = z.\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.3}$$

$u_z = u'_z.\cos\beta$

β çok küçük olduğundan $\cos\beta \approx 1$ ve $u_z = u'_z$ olur. u_z , u' nun (+) yönüne ters yönde olduğu için

$$u_z = -z\ \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.4}$$

Benzer şekilde;

$$v_z = -\ \frac{\partial w}{\partial y} \cdot z \tag{2.5}$$

z derinliğinde birim boy değişimi;

$$\left(\varepsilon_x\right)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z$$

$$\left(\varepsilon_x\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z \tag{2.6}$$

$$\left(\varepsilon_y\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z \tag{2.7}$$

z derinliğinde ve orta düzleme paralel bir elemandaki açı değişimi;

$$\left(\gamma_{xy}\right)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}\cdot z - \frac{\partial^2 w}{\partial y.\partial x}\cdot z$$

$$\left(\gamma_{xy}\right)_z = -2.z.\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} \qquad (2.8)$$

olur.

2.1.4. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları

$\sigma_z \approx 0$, $\varepsilon_z \approx 0$ alındığına göre;

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\cdot\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\cdot\sigma_x\right) \qquad (2.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{xy}$$

bağıntıları elastisite teorisinden bilinir. Burada

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (2.10)$$

dir. Bu bağıntılardan gerilmeler çekilirse;

$$\left(\sigma_x\right)_z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu.\varepsilon_y\right)_z$$

$$\left(\sigma_y\right)_z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu.\varepsilon_x\right)_z \qquad (2.11)$$

$$\left(\tau_{xy}\right)_z = G.\left(\gamma_{xy}\right)_z$$

olur.

2.1.5. Gerilme-Yer Değiştirme Bağıntıları

$$(\sigma_x)_z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu . z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$(\sigma_x)_z = -\frac{E.z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (2.12)$$

benzer şekilde

$$(\sigma_y)_z = -\frac{E.z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (2.13)$$

$$(\tau_{xy})_z = -\frac{E.z}{1+\nu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y} \qquad (2.14)$$

Görüldüğü gibi gerilmeler z'e lineer olarak bağlıdır. Demek ki, kesit yüksekliğince gerilmeler lineer olarak değişmektedir. Şu halde z indisi kaldırılıp, gerilmeler kısaca şu biçimde ifade edilebilir.

$$\sigma_x = a \, . \, z$$

$$\sigma_y = b \, . \, z \qquad (2.15)$$

$$\tau_{xy} = c \, . \, z$$

burada,

$$a=-\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$b=-\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (2.16)$$

$$c=-\frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}$$

olur.

2.1.6.Gerilmelere Bağlı Olarak Momentlerin Bulunması

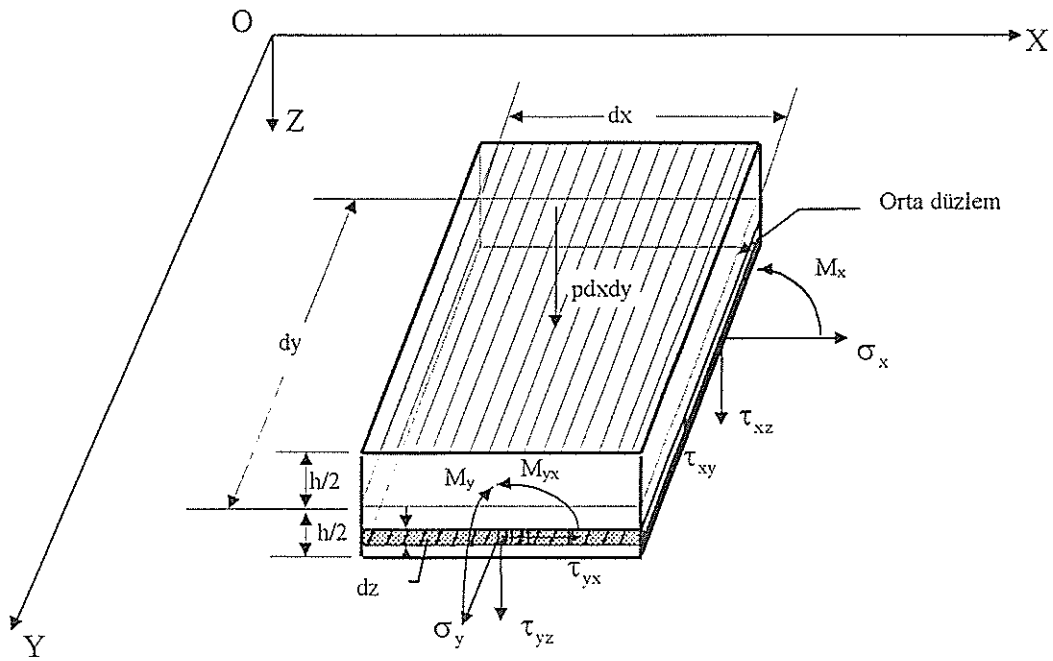
Birim boyda etki eden momentleri M_x, M_y, M_{xy} ile gösterelim. Demek ki dy=1 için σ_x gerilmelerinin tarafsız eksene göre momentine M_x diyoruz. dz yüksekliğindeki diferansiyel elemana etkiyen kuvvet σ_x.dA olur (Şekil 2.3). Bu kuvvetin tarafsız eksene göre momenti,

$$M_x=\sigma_x.dA.z \qquad (2.17)$$

ve

$$dA=dz.dy \qquad (2.18)$$

dir. Bu plak yüksekliği boyunca integre edilirse,



Şekil 2.3 Plak elemanında gerilmeler

$$dy.M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x . dA . z = dy \int \sigma_x . z . dz \qquad (2.19)$$

elde edilir. (2.15) nolu denklemde

$$\sigma_x = a.z$$

idi. Bu değer yukarıdaki denklemde yerine yazılıp integre edilirse

$$M_x = a \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 . dz = a. \left| \frac{z^3}{3} \right|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{a.h^3}{12} \qquad (2.20)$$

elde edilir. Dikkat edilirse $h^3/12$ 'nin birim genişlik için plak atalet momenti olduğu görülür.

$M_x = a \cdot I$

$M_y = b \cdot I$ (2.21)

$M_{xy} = c \cdot I$

olur. a, b ve c ifadeleri (2.16) eşitliğinde verilmiştir. Bu ifadeler (2.21) nolu denklemde yerlerine yazılırsa,

$$M_x = - \frac{E.I}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = - \frac{E.I}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (2.22)$$

$$M_{xy} = - \frac{E.I}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}$$

elde edilir. (2.22) nolu denklemde $\frac{E.I}{1-\nu^2}$ ifadesine plak rijitliği denir ve D ile gösterilirse

$$M_x = -D.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (2.23)$$

$$M_{xy} = - D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}$$

olur. Bu bağıntılar plağın herhangi bir noktasındaki momentleri, o noktanın çökmesinin kısmi türevlerine bağlı olarak vermektedir.

2.2. Kalın Plaklarda Kayma Şekil Değişimi

Klasik Plak Teorisinde kayma şekil değişimi ihmal edilir ve şekil değişimi tamamen w(x,y)' nin fonksiyonu olarak tanımlanır. Burada w plak düzlemine dik yer değiştirmedir. Eğer kayma şekil değişimi dikkate alınırsa bu şekil değişimlerin noktaların dönmeleri içerisinde gösterilmeleri önemlidir. θ_x ve θ_y şekil değiştirmemiş plakın orta düzleminin normalinin toplam dönmeleri olsun. Kayma şekil değişimi sıfır alınmadıkça θ_x ve θ_y şekil değiştirmiş yüzeyin teğetinin eğimi olan $\frac{\partial w}{\partial x}$ ve $\frac{\partial w}{\partial y}$ değerlerine eşit olamaz. Bundan dolayı sonlu eleman formülasyonunda θ_x ve θ_y elemanlar arasında uygun hale getirilmesi gereken orta yüzey normalinin toplam dönmeleridir ve noktaların serbestlik dereceleri içerisinde ifade edilmesi gerekir.

Kalın plak ve tabakalı plak konstrüksiyonlarında kayma şekil değişiminin incelenmesi önemlidir. Plaklarda kayma şekil değişiminin incelenmesinde Mindlin yaklaşımı uygundur ve sonlu eleman formülasyonunda yaygın şekilde kullanılmaktadır.

2.2.1. Mindlin Teorisi

Mindlin yaklaşımına göre şekil değiştirmemiş bir plağın orta yüzeyin normali düz bir doğru olup şekil değiştirdikten sonra tekrar düz kalır, fakat artık yüzeye normal değildir. Ortalama dönme, yüzeye dik normalin yaptığı dönme ile kayma şekil değişiminden dolayı oluşan dönmenin toplamı olarak alınabilir. (Şekil..2.5). Böylece gerçek kayma şekil değişimi kalınlık boyunca düzgün kayma şekil değişimi gösteren normalin dönmesine eşit olacağı kabul edilir.

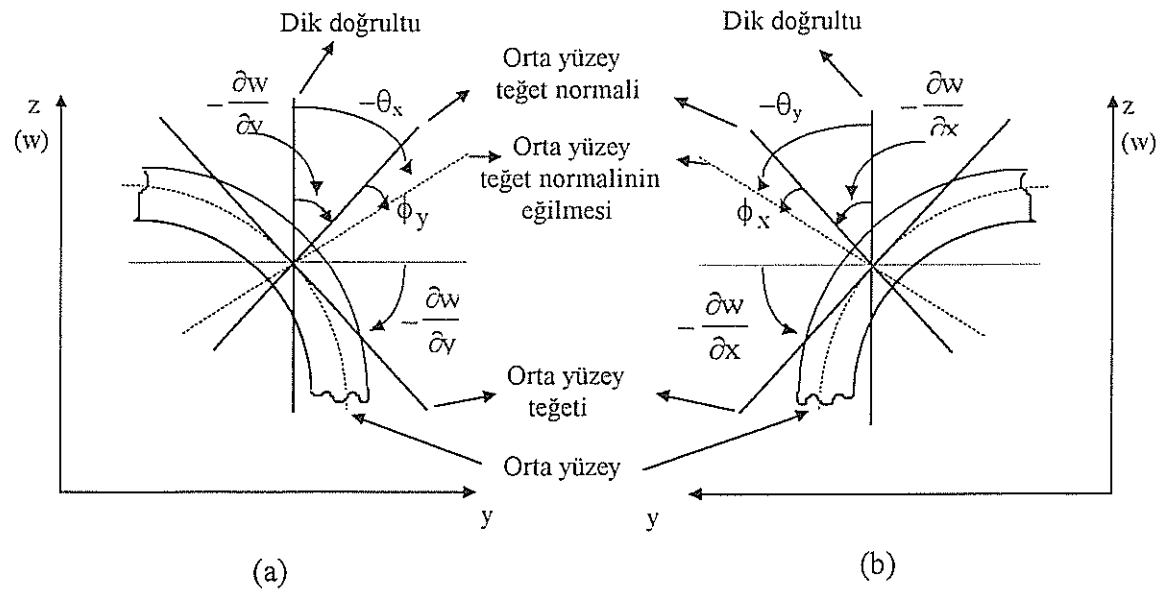
Mindlin'in plaklar için yaptığı kabuller;

1) w plak çökmesi küçüktür.

2) Şekil değişiminden önce plak orta yüzeyin normali bir doğru olup şekil değişiminden sonra bu doğru yüzeye normal olmak zorunda değildir.

3) Plak orta düzlemine dik gerilmeler ihmal edilir.

Kayma şekil değişimi hesabi için yapılan ikinci kabulün dışındaki kabuller Kirchhoff Teorisindeki kabullerle aynıdır.



Şekil 2.5. Kayma şekil değişiminde x ve y eksen normallerinin dönmesi.

Şekil 2.5 (b)' de ϕ_x, x =sabit kesiti için ortayüzey normalinin kayma gerilmesinden dolayı x ekseni etrafında dönmesidir. Toplam dönme θ_y,

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \tag{2.24}$$

şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde şekil 2.5(a)'da ϕ_y, y = sabit kesiti için, ortayüzey normalinin kayma gerilmesinden dolayı y ekseni etrafında dönmesidir. Toplam dönme,

$$-\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \tag{2.25}$$

olarak yazılabilir.

(2.24) ve (2.25) no'lu eşitliklerden ortayüzey normalinin x ve y ekseni etrafındaki dönmeleri olan ϕ_x ve ϕ_y çekilip yazılırsa,

$$\phi_x = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\phi_y = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (2.26)$$

elde edilir.

(2.26) eşitliği θ_x ve θ_y toplam dönmelerin çok küçük olduğu ve ε_z şekil değişiminin ihmal edildiği kabulü yapılarak çıkartılmıştır. Kalın plaktan ince plağa yaklaştıkça ortayüzey normalinin dönmeleri sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla $\theta_x \to -\frac{\partial w}{\partial x}$ ve $\theta_y \to \frac{\partial w}{\partial y}$ olur.

Kayma gerilmelerden dolayı oluşan şekil değiştirme enerjisi,

$$U_s = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot GA \iint \left[(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \right] dxdy \qquad (2.27)$$

şeklinde olur. Burada α kayma gerilmesi düzeltme faktörüdür. (2.26) eşitliğinden ϕ_x ve ϕ_y ifadeleri (2.27) eşitliğinde yazılırsa, izotropik bir plak için,

$$U_s = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \left[\frac{24(1-\nu^2)}{Eh^3} \frac{1}{2} \alpha GA \right] \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 \right] dxdy \qquad (2.28)$$

ifadesi elde edilir. $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ olduğu için (2.28) eşitliği,

$$U_s = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \cdot \frac{6\alpha(1-\nu)}{h^2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 \right] dxdy \qquad (2.29)$$

şekline dönüşür.

İzotropik plaklarda eğilmeden dolayı oluşan şekil değiştirme enerjisi plakların teorisinden aşağıdaki gibi yazılabilir[24].

$$U_b = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left\{ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right\} dxdy \qquad (2.30)$$

Bu taktirde toplam şekil değiştirme enerjisi,

$$U = U_b + U_s \qquad (2.31)$$

şeklinde olur.

3. KOMPOZİTLERİN MAKROMEKANIK DAVARANIŞI

3.1 Ortotropik Tabakalarda Düzlem Gerilme Durumu

Fiber takviyeli tabakalar çoğunlukla ince olduklarından düzlem gerilme durumunun geçerli olduğu, yani düzleme dik gerilmelerin etkimediği kabul edilebilir.

$$\sigma_3=0, \qquad \tau_{23}=0, \qquad \tau_{31}=0$$

Bu taktirde Hooke bağıntısı,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

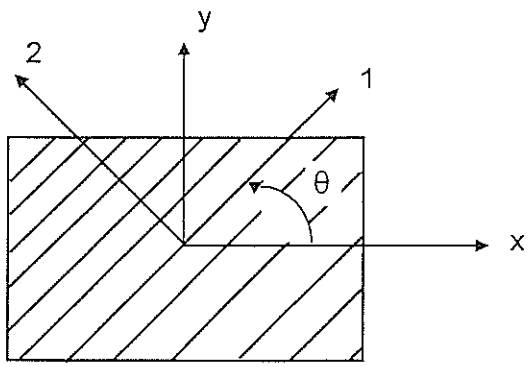
şeklini alır. Matrisin bağımsız elemanlarının mühendislik sabitleri cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$Q_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}.\nu_{21}} \quad , \qquad Q_{12}=\frac{\nu_{12}.E_1}{1-\nu_{12}.\nu_{21}} \tag{3.2}$$

$$Q_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}.\nu_{21}} \quad , \qquad Q_{66}=G_{12}$$

3.2. Mekanik Davranışın Yöne Bağlı Olarak Değişimi

(3.1) nolu eşitlik, malzemenin asal doğrultusundaki gerilme-şekil değiştirme bağıntılarıdır. Uygulanan gerilmeler her zaman malzemenin asal eksenleri ile çakışmayabilir. Böyle bir durumda farklı yönlerdeki bağıntılar dönüşüm tansörü (T_{ij}) kullanılarak saptanabilir.



Şekil 3.1. Her hangi x-y eksenlerinden malzeme asal eksenlerine pozitif yönde dönüş.

Örneğin, etkiyen gerilmelerin malzemenin asal doğrultuları 1 ve 2 yönlerinde değil de x ve y yönlerinde olması halinde, bu gerilme halinin malzeme asal eksenleri ile çakışan bir koordinat sistemindeki (Şekil 3.1) ifadesi veya dönüşümü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] . \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (3.3)$$

ya da bunun tersi,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[T]^{-1}.\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Burada $[T]$ dönüşüm matrisidir. Benzer şekilde şekil değiştirmeler arasındaki dönüşüm,

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}/2\end{Bmatrix}=[T]^{-1}.\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}/2\end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada dönüşüm matrisi $[T]$ aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$[T]=\begin{bmatrix}\mathrm{Cos}^2\theta & \mathrm{Sin}^2\theta & 2.\mathrm{Sin}\theta.\mathrm{Cos}\theta\\ \mathrm{Sin}^2\theta & \mathrm{Cos}^2\theta & -2.\mathrm{Sin}\theta.\mathrm{Cos}\theta\\ -\mathrm{Sin}\theta.\mathrm{Cos}\theta & \mathrm{Sin}\theta.\mathrm{Cos}\theta & \mathrm{Cos}^2\theta-\mathrm{Sin}^2\theta\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Bununla beraber bir [R] matrisi,

$$[R]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \tag{3.7}$$

kullanılarak ½ çarpanı yok edilir ve

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}=[R].\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}/2\end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[R].\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}/2\end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

eşitliği yazılabilir. Eğer gerilmenin uygulandığı eksenler olan x ve y, malzemenin asal eksenleri 1 ve 2 ile çakışmıyor ise gerilme şekil değiştirme bağıntısı şöyle yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[T]^{-1}.\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=[T]^{-1}.[Q].\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}=[T]^{-1}.[Q].[R].\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}/2\end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[T]^{-1}.[Q].[R].[T].\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}/2\end{Bmatrix}=[T]^{-1}.[Q].[R].[T].[R]^{-1}.\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

Burada,

$$[\bar{Q}]=[T]^{-1}.[Q].[R].[T].[R]^{-1} \tag{3.12}$$

ile gösterilirse x-y eksenlerine ait gerilme şekil değiştirme bağıntısı,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[\bar{Q}].\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir. $[\bar{Q}]$ rijitlik matrisinin elemanları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}.\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2.Q_{66}).\sin^2\cos^2\theta + Q_{22}.\sin^4\theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4.Q_{66}).\sin^2\theta.\cos^2\theta + Q_{12}.(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}.\sin^4\theta + 2.(Q_{12} + 2.Q_{66}).\sin^2\cos^2\theta + Q_{22}.\cos^4\theta \qquad (3.14)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2.Q_{66}).\sin\theta.\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2.Q_{66})\sin^3\theta.\cos\theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2.Q_{66}).\sin^3\theta.\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2.Q_{66})\sin\theta.\cos^3\theta$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2.Q_{12} - 2.Q_{66}).\sin^2\theta.\cos^2\theta + Q_{66}.(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

(3.14) eşitliklerindeki mühendislik sabitleri cinsinden, Q_{ij} matris bileşenlerinin izotrop malzemeler için, tek yönlü takviyeli kompozit malzemelerden farklı olacağından hareketle tek yönlü takviye için,

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}.\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}.E_1}{1 - \nu_{12}.\nu_{21}} \qquad (3.15)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}.\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ve $G_{12} = G$ değerleri (3.15) eşitliğinde yazılarak elde edilen ifadeler , (3.14) eşitliğinde $\theta = 0^o$ alınmak kaydıyla yazılırsa izotrop bir malzeme için $[\bar{Q}]$ rijitlik matris elemanları tanımlanmış olur.

Çapraz takviyeli kompozit malzemeler için ise rijitlik matris elemanları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q_{11} = \frac{E_1 + E_2}{2(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \qquad (3.16)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{2(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

3.3. Çok Tabakalı Kompozit Malzemeler

3.3.1. Çok Tabakalı Kompozit Malzemelerin İstiflenme Geometrisi

Fiber takviyeli kompozit malzemeler çoğunlukla tek yönde takviyeli çok sayıda ince ortotropik tabakadan oluşur. Bunların istiflenme geometrisi, fiber doğrultuların üstten altta doğru sıralanması ile belirtilir. Bu notasyona ait bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

$[0^0/90^0/0^0]_T$: Fiber yönleri levha asal eksenlerine göre 0^0 ve 90^0 olacak şekilde yerleştirilmiş üç tabakadan oluşan bir levha. (T: toplam anlamındadır.)

Simetrik yerleştirmelerde s alt indisi ile notasyon kısaltılabilir.

$$[0^0/90^0/90^0/0^0]_T = [0^0/90^0]_S$$

Levha içinde bir tabaka birden çok kullanılırsa bu sayı indis olarak verilebilir.

$$\left[0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}\right]_T = \left[0^{\circ}/90^{\circ}{}_2/0^{\circ}\right]_T$$

Ters açılı yerleştirmelerde ise şöyle bir kısaltma kullanılabilir.

$$\left[0^{\circ}/+45^{\circ}/-45^{\circ}/0^{\circ}\right]=\left[0^{\circ}/\pm 45^{\circ}\right]_s$$

Tek sayıda tabakadan oluşan levhalarda orta düzlem bir tabakanın ortasından geçer, bu orta tabakayı belirtmek için o tabaka üzerine bir çizgi çizilir.

$$\left[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}\right]_T = \left[0^{\circ}/\overline{90^{\circ}}\right]_s$$

3.3.2. Klasik Laminasyon Teorisi

İki veya daha fazla tabakadan oluşan levhalar, malzeme asal eksenleri ile çeşitli açılar yapan zorlanmalara dayanabilecek şekilde ve tabakaların değişik doğrultularda istiflenmesiyle üretilirler. Bu tip bir levhanın rijitlikleri klasik laminasyon teorisi ile hesaplanabilir. Tabakaların değişik yönlendirmeleri sonucunda levhada belirli bir asal eksen olmayabilir. Klasik laminasyon teorisi bir tabakadan yola çıkıp bir levhanın davranışını incelemektedir.

3.3.3. Tek Bir Tabakanın Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısı

Düzlem gerilme altındaki bir ortotropik tabakanın malzeme asal eksenlerindeki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \qquad (3.17)$$

tabaka düzleminde olan herhangi bir eksen takımındaki gerilme şekil değiştirme bağıntısı ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.18}$$

Bu sayede değişik açılardaki tabakalar için transforme edilmiş, indirgenmiş rijitlik matrisinin ($\bar{Q}_{ij}$) hesaplanması mümkün olur. Çok sayıda tabakadan oluşan bir levhanın k. tabakasının gerilme şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k . \{\varepsilon\}_k \tag{3.19}$$

3.3.4. Çok Tabakalı Bir Levhada Gerilme -Şekil Değiştirme Davranışı

Bir levhanın kalınlığı boyunca gerilme şekil değiştirme değişiminin hesaplanması için levhanın uzama ve eğilme rijitliklerinin bilinmesi gerekir. Bir çok tabakadan oluşan levhaların mekanık davranışının incelenmesinde şu kabuller yapılır:

a) Tabakalar arasındaki bağlar mükemmeldir ve kayma etkisiyle deforme olmazlar, levha tek bir tabaka gibi davranır.

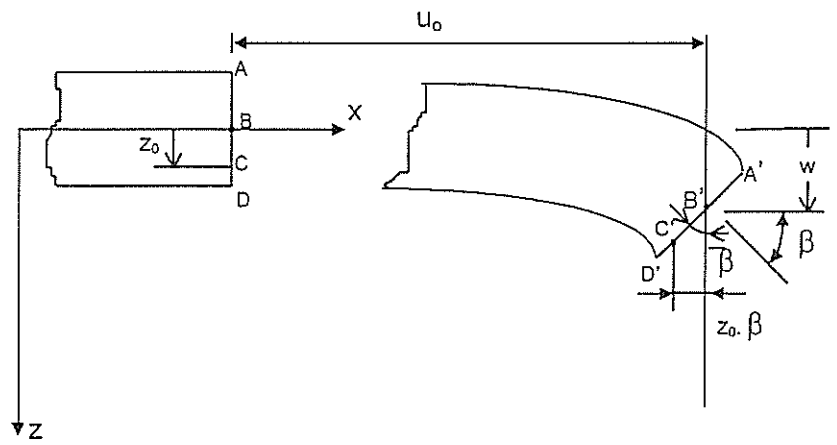
b) Levhanın orta düzlemine dik düzlem; levha şekil değiştirse dahi orta düzleme diktir. Yani orta düzleme dik düzlemlerde kayma olmaz.

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

c) Normal doğrultusunda kalınlığının sabit kaldığı kabul edilir.

$\varepsilon_z = 0$

Çok tabakalı ve fiber takviyeli bir levha alalım ve x, y, z doğrultularındaki u, y, w yer değişimlerini arayalım. Bir ABCD düzleminin yer değiştirmesini xz-düzleminde inceleyelim.



Şekil 3.2. Bir levhadaki yer değiştirmeler.

Orta düzlemdeki B noktasının x doğrultusunda yer değişimi u_o ise düzlem üzerindeki diğer noktalar için (örneğin C noktası)

$u = u_o - z_o \cdot \beta$

yazılabilir. Burada β, x doğrultusunda levha orta düzleminin eğimidir.

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (3.20)$$

u yer değişimi levha kalınlığı boyunca herhangi bir z noktasında

$$u = u_o - z_o \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.21}$$

olarak yazılabilir. Aynı şekilde y doğrultusundaki v yer değişimi de

$$v = v_o - z_o \frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.22}$$

olur. Bilindiği gibi $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ dır. Bu yüzden şekil değişimleri olarak sadece $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve γ_{xy} söz konusudur. Bu değerler yer değişimleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.23}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

dolayısıyla yukarıdaki bağıntıların türevi alınarak

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{3.24}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2.z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y} = 2.\varepsilon_{xy}$$

veya

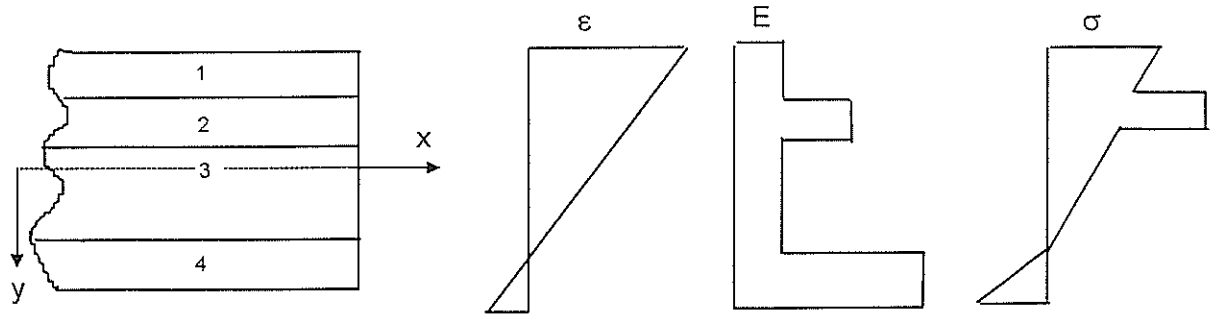
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

Bu denklemdeki ε_x^o, ε_y^o , γ_{xy}^o orta düzlemdeki şekil değişimleridir ve şu şekilde ifade edilebilirler.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_o}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_o}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_o}{\partial y} + \dfrac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x . \partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

Bu denklemdeki son terim orta düzlemin bükülme eğriliğidir. Yukarıdaki denklemde kalınlık boyunca şekil değişimi değerinin gerilme -şekil değiştirme bağıntısında yerine konulmasıyla k. tabakadaki gerilme değeri levha orta düzleminin şekil değişimleri ve eğrilikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Çok tabakalı Fiber Takviyeli Kompozit Malzeme | Şekil değiştirmeler | Elastiklik Modülü | Gerilmeler

Şekil 3.3. Levha kalınlığı boyunca gerilmeler ve şekil değiştirmeler.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix} \cdot \left[\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \gamma_{xy}^o\end{Bmatrix} + z. \begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{Bmatrix} \right] \tag{3.28}$$

Levhanın her bir tabakası için Q_{ij} matrisi farklı olabileceğinden, levha kalınlığı boyunca gerilme değişimi sürekli değildir, buna karşın tabakalar arası bağlar mükemmel olduğundan şekil değişimlerindeki süreklilik bozulmaz. Şekil değiştirme ve gerilme değişimleri şekil 3.3' te gösterilmiştir.

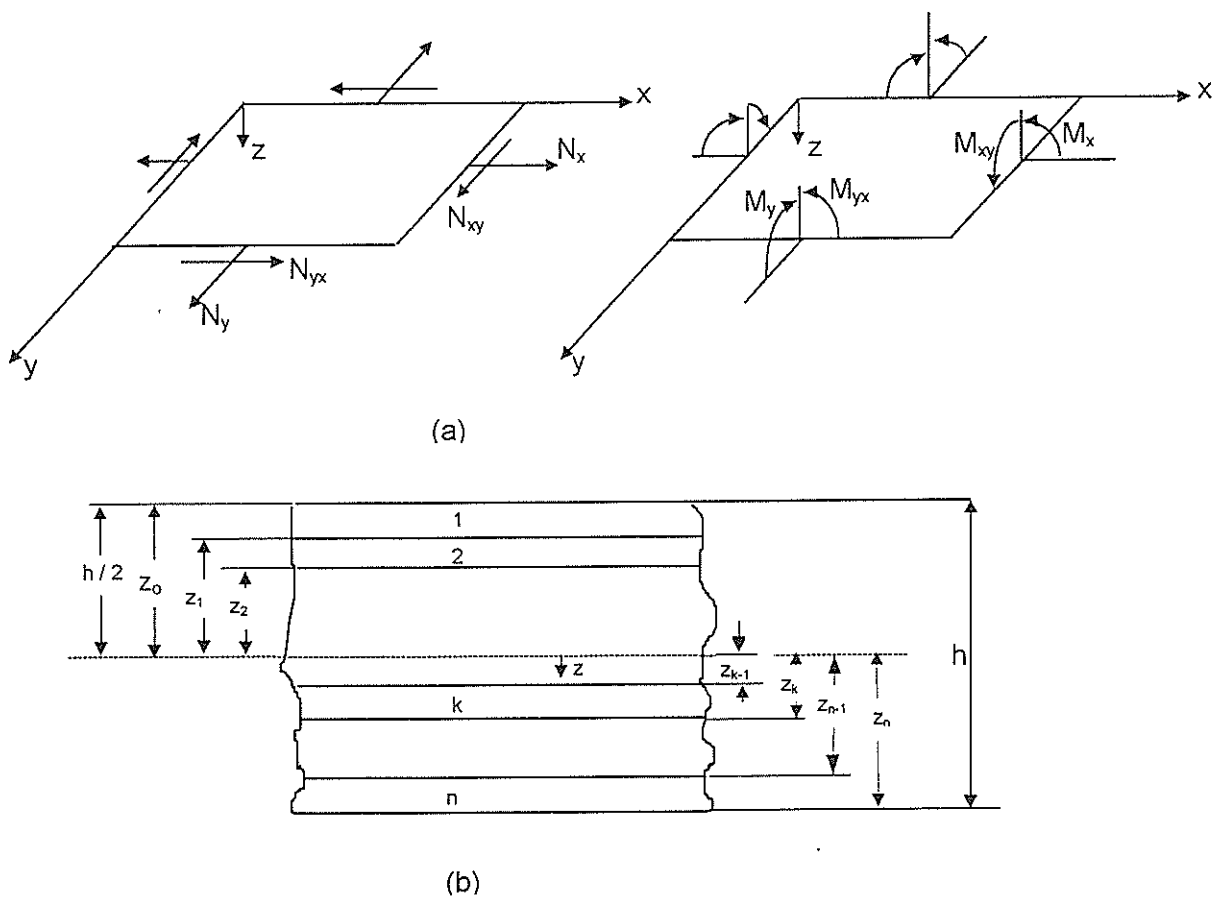
3.3.5. Bir Levhaya Etkiyen Bileşke Kuvvetler ve Momentler

Bir levhaya etkiyen bileşke kuvvet ve momentler her bir tabakadaki gerilmelerin levha kalınlığı boyunca integre edilmesi ile elde edilir.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x . dz \tag{3.29}$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x . z . dz \qquad (3.30)$$

Burada N_x levha enine kesitinin birim genişliği başına etkiyen kuvvet, M_x de birim genişlik başına etkiyen momenttir (Şekil 3.4.a).



Şekil 3.4. a) Bir levhaya etkiyen kuvvet ve momentler.

b) n tabakalı bir levhada koordinatlar.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k .dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} .dz \tag{3.31}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k .z.dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} .z.dz \tag{3.32}$$

Yukarıdaki denklemlerdeki z_k ve z_{k-1}, levhanın z doğrultusundaki kalınlık koordinatlarıdır ve z_o= -h/2' dir (Şekil 3.4. b). Bu bileşke kuvvet ve momentler integral alındıktan sonra z' den bağımsızdırlar fakat x ve y' nın fonksiyonudurlar.

Her bir tabaka için bilinen gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki şekle dönüştürülebilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} .dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} .z.dz \right] \tag{3.33}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} .z.dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} .z^2.dz \right] \tag{3.34}$$

ε_x^o, ε_y^o, γ_{xy}^o, κ_x, κ_y ve κ_{xy} z'in fonksiyonu değildirler. Bunlar orta düzleme ait değerlerdir. Bu yüzden toplam işareti içinden çıkartılabilir ve yukarıdaki denklemler şu şekli alırlar.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.36}$$

Burada;

A_{ij} : Uzama rijitlik matrisi

B_{ij} : Birleşme rijitlik matrisi

D_{ij} : Eğilme rijitlik matrisi

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij} \right)_k \cdot \left(z_k - z_{k-1} \right) \tag{3.37.a}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij} \right)_k \cdot \left(z_k^2 - z_{k-1}^2 \right) \tag{3.37.b}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij} \right)_k \cdot \left(z_k^3 - z_{k-1}^3 \right) \tag{3.37.c}$$

B_{ij} matrisi eğilme ile uzama arasındaki ilişkiyi temsil eder. B_{ij} terimi var olan çok tabakalı bir levhada , eğilme ve/veya dönme yaratmadan tabakayı çekmenin olanağı yoktur. Yani uzama kuvveti yalnızca uzama şekil değişimleri değil aynı zamanda levhada eğme ve/veya dönme de yaratır. Aynı şekilde levhaya moment uygulandığında uzama ve kısalmalar da söz konusudur.

3.3.6. Tabakalı Kompozitlerde Kayma Şekil Değişimi Hesabı

Çoğu kompozit malzemelerden yapılmış plakların gerilme analizinde kayma şekil değişimini dikkate almak zorunludur. Çünkü kompozit plakların kayma şekil direnci çok düşüktür ve kayma şekil değişim etkisi önemli olup ihmal edilemez. Bu yüzden (3.1) eşitliği şöyle olur.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \tag{3.38}$$

Burada Q_{11}, Q_{22} ve Q_{66} ifadeleri (3.2)' nolu denklemde verilmiştir. Q_{44} ve Q_{55} ifadeleri ise aşağıdaki gibidir.

$$Q_{44}=G_{23} \qquad \text{ve} \qquad Q_{55}=G_{31} \tag{3.39}$$

Tabaka düzleminde olan herhangi bir eksen takımındaki kayma şekil değişimini ihtiva eden gerilme şekil değiştirme bağıntısı ,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26}\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

$$\bar{Q}_{44} = \bar{Q}_{44}\, m^2 + \bar{Q}_{55}\, n^2,$$

$$\bar{Q}_{55} = \bar{Q}_{44}\, n^2 + \bar{Q}_{55}\, m^2 \qquad (3.41)$$

$$\bar{Q}_{45} = (\bar{Q}_{55} - \bar{Q}_{44})mn$$

şeklinde ifade edilir. Bu değişiklikle k tabakadan oluşan bir levada bütün gerilme ve momentler ifade edilebilir.

3.4. Bazı Özel Levhaların Rijitlik Matrisleri

Yukarıda en genel hal için verilmiş olan rijitlik ifadeleri ile kuvvet ve moment denklemleri özel durumlar için oldukça basitleşmektedir.

3.4.1. Tek Bir İzotropik Tabakadan Oluşan Levha

Malzeme özellikleri E, ν ve kalınlığı h olan bir izotropik tabakanın oluşturduğu levha için rijitlik matrisi elemanları aşağıdaki bağıntılara indirgenebilir.

$$A_{11} = \frac{E.h}{1-\nu^2} \quad , \qquad A_{12} = \frac{\nu.E.h}{1-\nu^2} \quad , \quad A_{22} = \frac{E.h}{1-\nu^2}$$

$$A_{66} = \frac{E.h}{2.(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2} \cdot A_{11}, \qquad A_{16} = 0 \quad , \qquad A_{26} = 0 \qquad (3.42)$$

$$B_{ij} = 0 \qquad (3.43)$$

$$D_{11} = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \quad , \qquad D_{12} = \frac{\nu.E.h^3}{12.(1-\nu^2)} \quad , \quad D_{22} = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_{66} = \frac{E.h^3}{24.(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2} \cdot D_{11}, \qquad D_{16} = 0 \quad , \qquad D_{26} = 0 \tag{3.44}$$

Görüldüğü gibi oluşan kuvvetler yalnızca levhanın orta düzleminin şekil değişimine ve oluşan momentlerde orta düzlemin eğriliklerine bağlıdır.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E.h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

B_{ij} =0 olduğu için izotropik bir levhanın eğilme ve uzaması arasında bir bağıntı mevcut değildir.

3.4.2. Tek Bir Ortotropik Tabakadan Oluşan Levha

Kalınlığı h ve tabaka rijitlikleri $\bar{Q}_{ij}$ olan bir ortotropik tabakadan oluşan levhanın rijitlikleri aşağıdaki gibidir.

$$A_{11} = \bar{Q}_{ij}.h \qquad B_{ij} = 0 \qquad D_{ij} = \frac{\bar{Q}_{ij}.h^3}{12} \tag{3.47}$$

Yine eğilme ve uzamalar arasında bir bağıntı olmadığı için kuvvet ve momentler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.49}$$

İzotropik levhalardan farklı olarak burada uzama kuvvetleri uzama şekil değişimlerine olduğu kadar kayma şekil değişimine de bağlıdır. Aynı şekilde kayma kuvveti N_{xy}, kayma şekil değişimi γ_{xy}^o'e bağlı olduğu kadar uzama şekil değişimleri ε_x^o ve ε_y^o 'e de bağlıdır. Benzer olarak oluşan momentlerin tümü hem eğrilikler κ_x ve κ_y' ye hem de dönmeyi ifade eden κ_{xy}' ye bağlıdır. Kuvvet ve moment eksenlerinin malzeme asal eksenleri ile çakışması halinde, bu özel durum için $\bar{Q}_{ij}$ yerine Q_{ij} kullanılacak ve A_{16} ile A_{26} bileşenleri sıfır olacaktır.

3.4.3. Çok tabakalı Simetrik Levha

Orta düzlem etrafında hem geometri hem de malzeme özellikleri bakımından simetrik olan levhalarda da genel rijitlik denklemleri oldukça basitleştirilebilir. Özellikle $(\bar{Q}_{ij})_k$ ve kalınlıklar h_k, simetrisinden dolayı tüm birleşme rijitlikleri yani B_{ij} terimleri sıfır olur. Eğilme ve uzama arasındaki bağıntının sıfırlanması pratikte iki önemli sonuca sebep olur. Bunların ilki, bu tip levhaların incelenmesi genellikle birleşme terimine sahip levhalarınkinden daha kolaydır. İkinci olarak simetrik levhalar sertleşme operasyonunu

takip eden soğuma esnasında kaçınılmaz büzülmelerden dolayı bir burkulma göstermezler. Sonuç olarak özel koşullar simetrik olamayan bir levha kullanımını gerektirmediği sürece, simetrik levhalar kullanılırlar. Simetrik levhalarda kuvvet ve momentler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \tag{3.50}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$

Burada A_{ij} ve D_{ij} ifadeleri, tabakaların toplam kalınlığı boyunca integre edilen (3.37) eşitliğindeki ifadelerdir.

4. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Sonlu eleman yöntemiyle, formülasyonun matris şeklinde ifade edilmesi oldukça önemlidir. İzoparametrik elemanın pratikte problemlere geometrik olarak daha uygun olması, dolayısıyla çözümün daha sağlıklı bir şekilde yapılabilmesi bu elemanların tercihine sebep olarak gösterilebilir ve kullanılan modele izoparametrik eleman formülasyonu uygulanacaktır.

Bu formülasyonun kullanılmasındaki asıl amaç; şekil fonksiyonları kullanılarak elemanın herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeler ile elemanların düğüm noktaları yer değiştirmeleri arasındaki bağıntıları doğrudan elde etmektir. Yani dönüşüm matrisleri yerine eleman matrislerinin yerini tutan gerekli serbestlik derecelerine sahip ifadeleri elde etmektir [13].

4.1 Ara Yüzeylerde Süreklilik

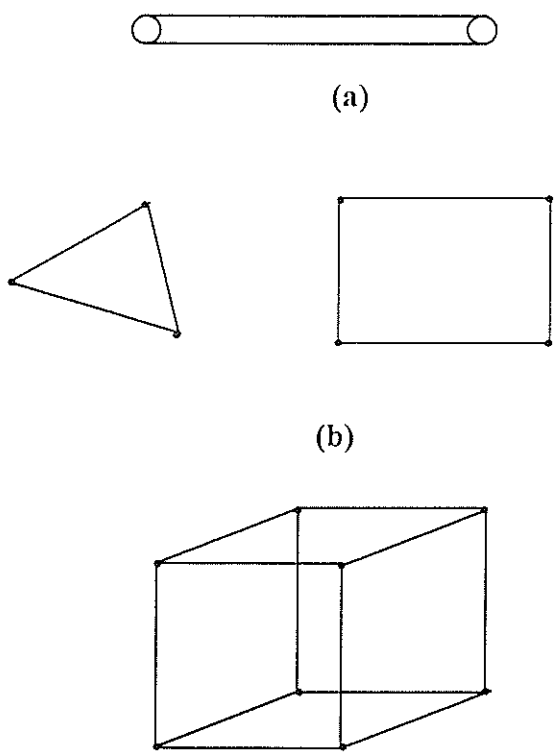
Sonlu eleman formülasyonunda en önemli adımlardan birisi şekil fonksiyonların seçimidir. Şekil fonksiyonlarının seçimindeki zorluk, elemanların ara yüzeylerinde sürekliliğin sağlanmasıdır.

Süreklilik için ortak eleman yüzeylerinde elemanların koordinatları ve yer değiştirmeleri aynı olmalıdır. Bu da rijit cisim yer değiştirmelerinin ve sabit şekil değiştirmelerin olmasıyla sağlanmaktadır. Bu durum üç düğümlü üçgen elemanlarda görülmektedir. Böyle bir elemanda süreklilik otomatik olarak sağlanmış olur [15], [16], [17].

Sonlu eleman metodunda genelleştirilmiş koordinatların kullanılması ile ara yüzeylerde süreklilik elde edilmektedir. Bunun için lokal koordinat sisteminde tanımlanan yer değiştirmeler, izoparametrik sonlu eleman formülasyonunda da ihtiva edilmelidir. Bu nedenle şekil fonksiyonları her düğümde bir olacak şekilde ayarlanmaktadır.

4.2 Sürekli Elemanların Formülasyonu

Bir sürekli elemanın global serbestlik derecesine uyan eleman matrislerinin doğrudan hesaplanması sonlu eleman formülasyonunun en önemli kısımlarından biridir. Bununla beraber önce elemanın lokal serbestlik derecesine uyan matrislerin formülasyonu çıkarılır ve daha sonra bu değerler global koordinatlara dönüştürülür.



Şekil 4.1. Sürekli elemanlara ait örnekler ; **a)** Tek boyutlu çubuk eleman, **b)** iki boyutlu elemanlar, **c)** Üç boyutlu eleman

Diğer taraftan izoparametrik sonlu eleman formülasyonunda temel işlem, elemanın yer değiştirmelerinin ve koordinatlarının elemanın tabii koordinat sistemi kullanılarak şekil değiştirme formunda ifade edilmesidir (Bathe, 1982). Eleman matrislerinin

oluşturulmasında göz önüne alınan değişik düğüm sayılarına sahip bazı elemanlar şekil 4.1 ' de görülmektedir.

4.3. Sonlu Eleman Şekil fonksiyonları

Sonlu eleman analizinde eleman içerisindeki her bir noktadaki alan değişkenlerinin değerleri ve elemanın düğüm noktalarındaki alan değişkenlerinin değerleri bilinmeyenlerdir. Elemanın değişik düğümlerindeki düğüm bilinmeyenleri ile eşdeğer olan bir şekil fonksiyonu seçilerek problemler özelleştirilmiş olur.

Sonlu eleman formülasyonunda genellikle Lagrange ve Hermite polinomları kullanılır [14].

n. derece için Lagrange İnterpolasyon Polinomu ;

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k} \frac{(x-x_0)}{x_k - x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \quad (4.1)$$

eşitliği ile verilir. Burada $L_k(x)$, n. dereceden bir polinomdur ve n lineer faktörlerinin çarpımıdır, n ise polinomun derecesini göstermektedir. $x = x_k$ için $L_k(x_k)$=1 değerine eşittir. $x = x_i$ ve $i \neq k$ olduğunda $L_k(x)$=0 olacaktır. $L_k(x)$ 'in bu özelliği x ekseni üzerinde takribi bir aralıkta keyfi bir $\phi(x)$ fonksiyonu ile gösterilerek kullanılabilir. $\phi(x)$ 'in değeri sadece x_0, x_1, x_2 ve x_3 farklı noktalarında biliniyorsa bu ϕ fonksiyonu yaklaşık olarak üçüncü dereceden bir polinomla ,

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{3} \phi_i L_i(x) = \phi_0 L_0 + \phi_1 L_1 + \phi_2 L_2 + \phi_3 L_3 = [L]\{\phi\} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ϕ_i değerleri, ϕ ' nin $x = x_i$, (i=0, 1, 2, 3) olduğu durumlardaki değeridir. Mesela ϕ_3 'ün katsayısı L_3 , (4.1) eşitliğinden,

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \tag{4.3}$$

şeklinde elde edilir. Buradan tek boyutlu bir eleman için şekil fonksiyonu ,

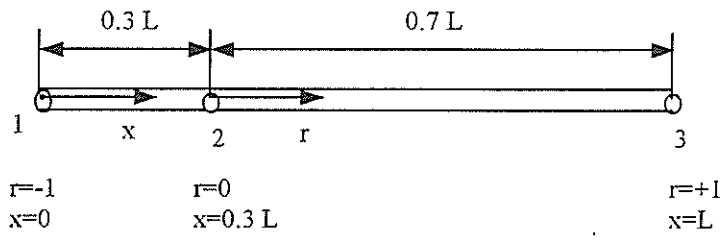
$$N_i(x) = L_i(x) \tag{4.4}$$

yazılarak,

$$\phi(x-x_0) = \sum_{i=1}^{n} N_i X_i \tag{4.5}$$

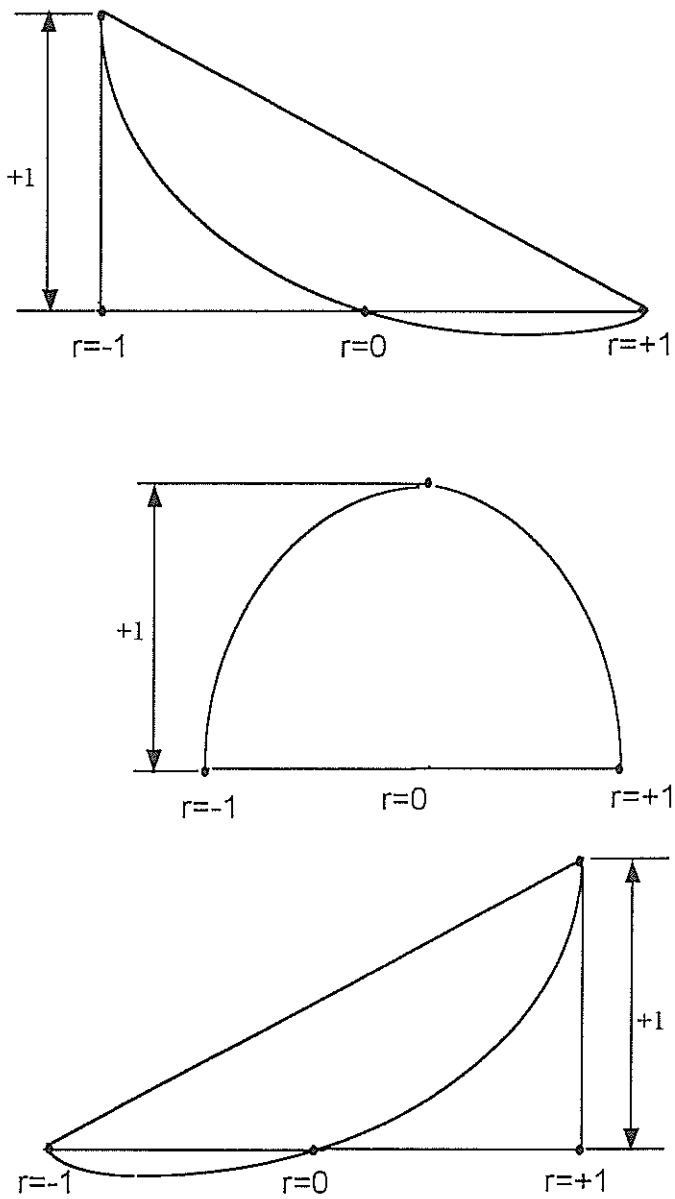
şeklinde gösterilebilir.

4.3.1 Tek Boyutlu Elemanlarda Şekil Fonksiyonları



Şekil 4.2. Üç düğüme sahip bir çubuk eleman

Bunun için Şekil 4.2 ' deki gibi üç düğüme sahip bir çubuk eleman için seçilen şekil fonksiyonu parabolik olmalıdır. Böylece L_2 fonksiyonu daha kolay bir şekilde elde edilmiş olur. Şöyle ki, $(1-r^2)$ olarak verilen parabol r=0 'da bire eşit ve r=$\pm$ 1' de sıfıra eşit olması şartlarını sağlamalıdır. Diğer iki şekil fonksiyonu L_1



$$L_1 = \frac{1}{2}(1-r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$$

$$L_2 = 1 - r^2$$

$$L_3 = \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$$

Şekil 4.3. Çubuk elemana ait şekil fonksiyonları

ve L_3, lineer bir fonksiyon ile parabolik fonksiyonun süperpoze edilmesi ile oluşturulabilir. L_3 şekil fonksiyonu için, (1+r)/2 fonksiyonu kullanılırsa, r=+1 ' de bir ve r=-1 ' de sıfır olmasını sağlamak için,

$$L_3 = \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$$

fonksiyonunun kullanılması gerekir. Şekil 4.2 ' deki çubuk elemana ait şekil fonksiyonları Şekil 4.3' de görülmektedir.

4.3. 2 İki Boyutlu Elemanlarda Şekil Fonksiyonları

Bir boyutlu elemanlar için (4.1) eşitliğinde tanımlanan Lagrange interpolasyon polinomları iki veya üç boyutlu elemanlar için uyarlanıp kullanılabilir. Lagrange interpolasyon polinomları ikişer ve üçer çarpımlarıyla sırasıyla iki ve üç boyutlu elemanların şekil fonksiyonları çıkarılır [14].

Kartezyen koordinatlarda verilen iki boyutlu elemanların lokal koordinatlara transformasyonu Şekil 4.4 ' deki gibidir. Burada lokal koordinatlardaki transformasyonu dikdörtgen ve üçgen olan, genel halde eğrisel çizgilerle çevrili iki boyutlu izoparametrik elemanlar görülmektedir. Örneğin Şekil 4.5 ' de verilen dört düğümlü izoparametrik elemanın şekil fonksiyonu ;

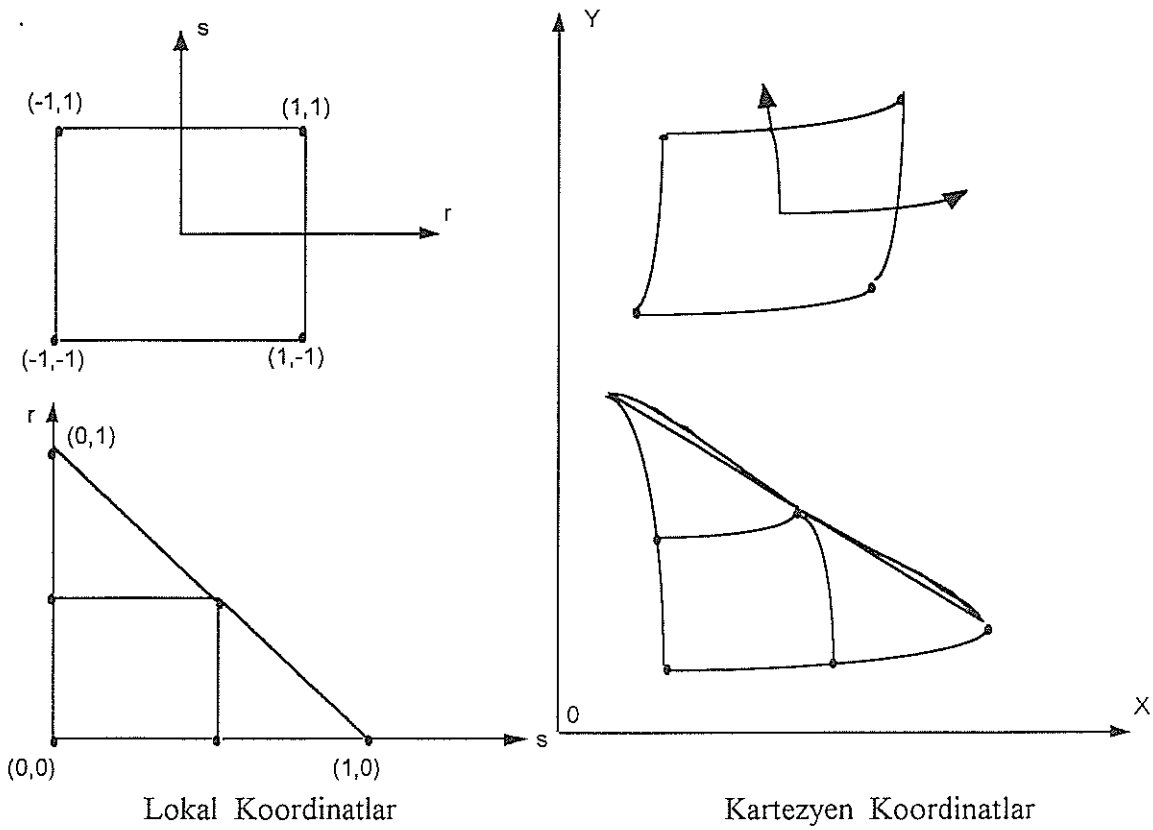
$$\phi(r,s) = [N]\phi_e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \phi_e \qquad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ;

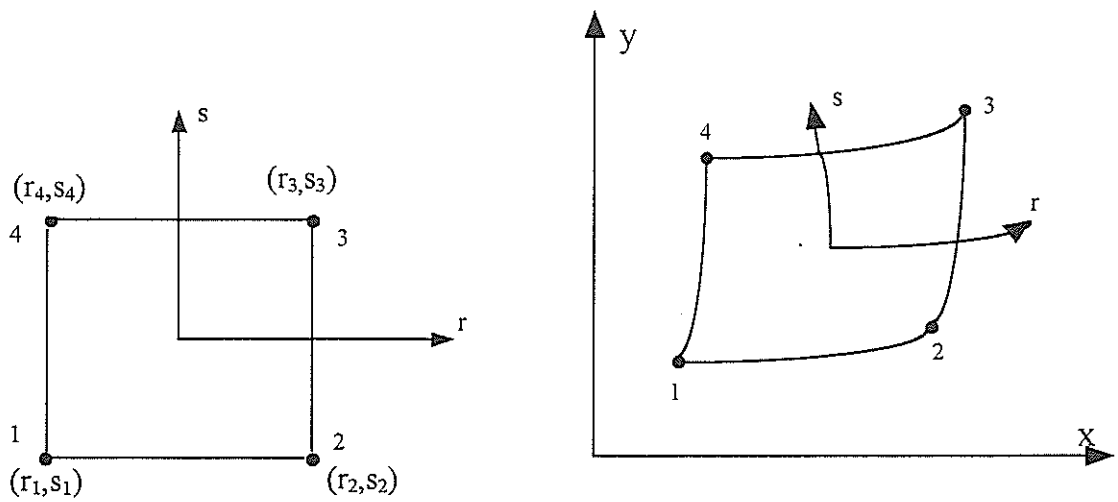
$$N_i(r,s) = L_i(r) \cdot L_i(s) \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (4.7)$$

$$\overset{\rho}{\phi}_e = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(r=-1, s=-1) \\ \phi(r=+1, s=-1) \\ \phi(r=+1, s=+1) \\ \phi(r=-1, s=+1) \end{Bmatrix}^e \qquad (4.8)$$

ifadesine eşittir.



Şekil 4.4 İki boyutlu elemanlarda transformasyon



Şekil 4.5. Dört düğümlü izoparametrik eleman

Dikdörtgen elemanın düğümleri için tanımlı bir i düğümü göz önüne alınıp, r ve s doğrultularındaki Lagrange şekil fonksiyonları sırasıyla $L_i(r)$ ve $L_i(s)$ ile gösterilerek aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$L_1(r)=\frac{r-r_2}{r_1-r_2}\ ;\ L_2(r)=\frac{r-r_1}{r_2-r_3}\ ;\ L_3(r)=\frac{r-r_4}{r_3-r_4}\ ;\ L_4(r)=\frac{r-r_3}{r_4-r_3} \tag{4.9}$$

$$L_1(s)=\frac{s-s_4}{s_1-s_4}\ ;\ L_2(s)=\frac{s-s_3}{s_2-s_3}\ ;\ L_3(s)=\frac{s-s_2}{s_3-s_2}\ ;\ L_4(s)=\frac{s-s_1}{s_4-s_1} \tag{4.10}$$

Eşitlik (4.7) ' de verilen düğüm şekil fonksiyonları, iki lineer fonksiyonun çarpımı olarak tanımlandığından bilineer olarak isimlendirilir. Bu ifadelerde her bir düğümün koordinatları o düğüm için değerleri yerine yazıldığında N değeri bir, diğer koordinatlar için diğer N katsayıları sıfır olmaktadır. Bu sayede ara yüzeylerde bire bir uygunluk sağlanmakta ve dolayısıyla süreklilik meydana gelmektedir. Aynı zamanda şekil fonksiyonu her düğümdeki özellikleri sağlamaktadır.

Şekil fonksiyonu Şekil 4.5 esas alınarak dikdörtgen bir elemanın dört düğümü için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
N_1(r,s)&=L_1(r)\cdot L_1(s)=\frac{r-1}{-1-1}\cdot\frac{s-1}{-1-1}=\frac{1}{4}(1-r)(1-s)\\
N_2(r,s)&=L_2(r)\cdot L_2(s)=\frac{r+1}{1+1}\cdot\frac{s-1}{-1-1}=\frac{1}{4}(1+r)(1-s)\\
N_3(r,s)&=L_3(r)\cdot L_3(s)=\frac{r+1}{1+1}\cdot\frac{s+1}{1+1}=\frac{1}{4}(1+r)(1+s)\\
N_4(r,s)&=L_4(r)\cdot L_4(s)=\frac{r-1}{-1-1}\cdot\frac{s+1}{1+1}=\frac{1}{4}(1-r)(1+s)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

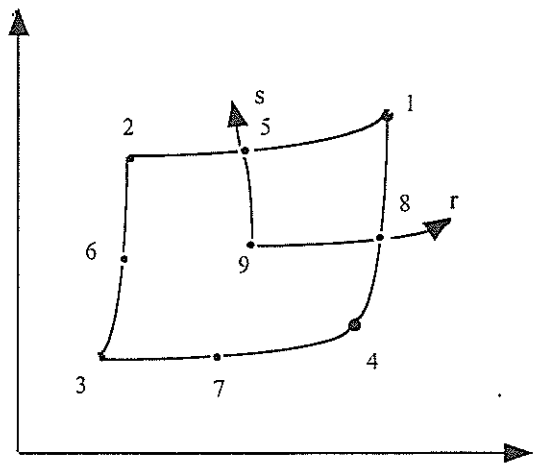
Dörtten fazla düğümlü elemanlarda şekil fonksiyonları benzer şekilde elde edilir. Böyle bir izoparametrik elemanda genel olarak şekil fonksiyonunun elemanı i düğüm için ;

$$N_i(r,s) = L_i(r)L_i(s) \tag{4.12}$$

şeklinde yazılmıştı. n düğümlü bir eleman için şekil fonksiyonu,

$$\phi(r,s) = \sum_{i=1}^{n} L_i(r)\cdot L_i(s)\cdot \phi_i = L_1(r)\cdot L_1(s)\cdot \phi_1 + \ldots + L_n(r)\cdot L_n(s)\cdot \phi_n \tag{4.13}$$

şeklinde yazılır. Düğüm sayısı dört düğümden dokuz düğüme kadar değişen izoparametrik düzlem elemanlar için şekil fonksiyonları Şekil 4.6 ' ya göre Tablo 4.1 'de verilmiştir.



Şekil 4.6. Dörtten dokuza kadar değişken düğüm sayısı ihtiva eden izoparametrik düzlem eleman.

Tablo 4.1 Şekil fonksiyonları.

		i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
N_1	1/4(1+r)(1+s)	-1/2N_5			-1/2N_8	-1/4N_9
N_2	1/4(1-r)(1+s)	-1/2N_5				-1/4N_9
N_3	1/4(1-r)(1-s)		-1/2N_6			-1/4N_9
N_4	1/4(1+r)(1-s)		-1/2N_6	-1/2N_7		-1/4N_9
N_5	1/2(1-r^2)(1+s)			-1/2N_7	-1/2N_8	-1/2N_9
N_6	1/2(1-r)(1-s^2)					-1/2N_9
N_7	1/2(1-r^2)(1-s)					-1/2N_9
N_8	1/2(1+r)(1-s^2)					-1/2N_9
N_9	(1-r^2)(1-s^2)					

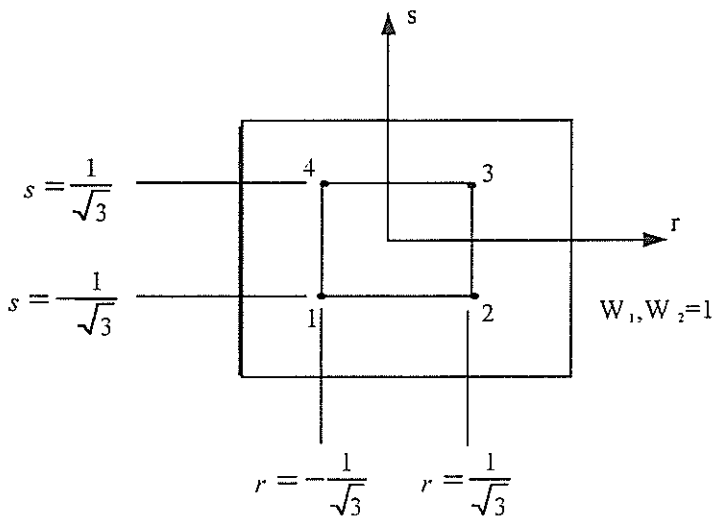
4.4 Nümerik İntegrasyon

Değişik nümerik integrasyon metodları mevcuttur. En yaygın olarak ve en kullanışlı metodlar şunlardır [14].

1- Newton-Cotes formülleri,

2- Gauss Formülleri

Her iki metod da nümerik integrasyonda etkilidir. Gauss integrasyon metodunda modelleme noktaları yüzeyin iç tarafındadır (Şekil 4.7). Dönel elemanların çözümünde kutupsal koordinatlarda ve silindirik koordinatlarda türev işlemlerinde R yarıçapına bağlı 1/R çarpanı işleme girdiğinde Gauss integrasyon metodu daha uygun olmaktadır.



Şekil 4.7. Gauss noktaları

Tek katlı bir integral işlemi aşağıda verildiği gibi olsun,

$$I=\int_{-1}^{1} f(r).dr \tag{4.14}$$

z düğüm olduğu düşünülürse,

$$I=\int_{-1}^{1} f(r).dr \approx w_1 f(r_1)+w_2 f(r_2)+...+w_z f(r_z) \tag{4.15}$$

olur. $w_1, w_2 .... w_z$ ağırlık faktörleridir. $r_1, r_2 .... r_z$ gauss noktalarıdır ve bu değerler Tablo 4.2 de verilmiştir. İki katlı integral için ,

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r,s)drds$$

$$I=\sum_{i=1}^{z}\sum_{i=1}^{z} w_i w_j f\left(r_i, s_j\right) \tag{4.16}$$

eşitliği elde edilir.

Tablo 4.2. Gauss Noktaları ve Ağırlık Faktörleri

$I = \int_{-1}^{1} f(r)dr \approx w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \Lambda + w_z f(r_z)$		
r_i		w_i
0.000000000000000	z=1	2.000000000000000
μ 0.577350269189626	z=2	1.000000000000000
0.000000000000000	z=3	0.888888888888889
μ 0.774596669241483		0.555555555555556
μ 0.339981043584856	z=4	0.652145154862546
μ 0.861136311594053		0.347854845137454
0.000000000000000		0.568888888888889
μ 0.538469310105683	z=5	0.478628670499366
μ 0.906179845938664		0.236926885056189
μ 0.238619186083197		0.467913934572691
μ 0.661209386466265	z=6	0.360761573048139
μ 0.932469514203152		0.171324492379170

5. PLAKLARDA SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

5.1.Temel Bağıntılar

Bölüm 2.' de gerilme sonuçları için temel bağıntılar Kirchhoff teorisine göre ince plaklar için çıkartıldı. Benzer bağıntılar Mindlin yaklaşımı kullanılarak kalın plaklarda kayma şekil değişimi için de türetilmiştir.

Ortayüzey normalinin x ve y ekseni etrafında dönmeleri ϕ_x ve ϕ_y, (2.26) eşitliğinde ifade edildi. Kayma gerilmesi τ_{xz} ve τ_{yz} ile ortayüzey normalinin dönmeleri ϕ_x ve ϕ_y arsındaki bağıntı matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{44} & C_{45}\\ C_{45} & C_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

C_{ij} değerleri (3.41) eşitliğindeki $\bar{Q}_{ij}$ değerlerdir.

İzotropik malzemeler için yukarıdaki ifade

$$\begin{Bmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

olarak yazılır.

Ortayüzey normalinin dönmeleri ϕ_x ve ϕ_y kalınlık boyunca sabit kalır ve kesit alanının çarpılmasına sebep olan Q_x ve Q_y ifadeleri

$$\begin{Bmatrix}Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix}=\frac{Eh\alpha}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

ya da genel olarak

$$\{Q\} = [C_s]\{\phi\} \tag{5.4}$$

şeklinde hesaplanır. Burada α kayma gerilmesi düzeltme faktörüdür. Bu değer genel olarak 5/6 olarak alınır , fakat çarpılmaya karşı tutulmanın olmadığı kesitlerde 2/3 ve tutulmanın olduğu kesitlerde de 1.0 alınabilir.

Şimdi de κ_x ve κ_y eğilmeleri ile κ_{xy} dönmelerini θ_x ve θ_y değerleri cinsinden yazalım.

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \qquad \kappa_y = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \qquad \kappa_{xy} = \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \tag{5.5}$$

(3.46) ve (5.4) eşitliklerinde verilen {M} ve {Q} gerilme sonuçları birleştirilebilir ve homojen plakalar için,

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \hline Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{h^3}{12} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ \text{Sym} & C_{22} & C_{26} \\ & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} h \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \hline \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \tag{5.6}$$

şeklinde ifade edilebilir.

İzotropik plaklar için bu ifade,

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \hline Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dfrac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \hline \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \tag{5.6.a}$$

ifadesine dönüşür.

Bu bağıntı kısaca şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_f] & [0] \\ [0] & [C_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\kappa_c\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

Yukarıdaki bağıntı yaygın olarak kullanılan gerilme şekil değiştirme bağıntısı için $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ ile karşılaştırılabilir. Böylece plakların eğilmesi durumunda gerilmeler ve buna karşılık gelen eğilme ve kayma şekil değiştirmeleri, gerilme ve şekil değiştirmelere benzetilerek incelenebilir. (5.7) eşitliği daha uygun olacağı için

$$\{\sigma\}_p = [C]_p \{\varepsilon\}_p \tag{5.8}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\{\sigma\}_p = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad [C]_p = \begin{bmatrix} [C_f] & [0] \\ [0] & [C_s] \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{\varepsilon\}_p = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \tag{5.9}$$

dir. (2.26) ve (5.5) eşitlikler kullanılarak eğilme ve kayma şekil değiştirmeleri w, θ_x ve θ_y üç yer değiştirme terimleri cinsinden yazılabilir.

$$\{\varepsilon\}_p = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} - \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \phi_y + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \phi_x + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

Plakların şekil değiştirme enerjisi gerilme bileşenleri cinsinden ifade edilirse,

$$U=\frac{1}{2}\iint\left(\{M\}^T\{\kappa_c\}+\{Q\}^T\{\phi\}\right)dA \tag{5.11}$$

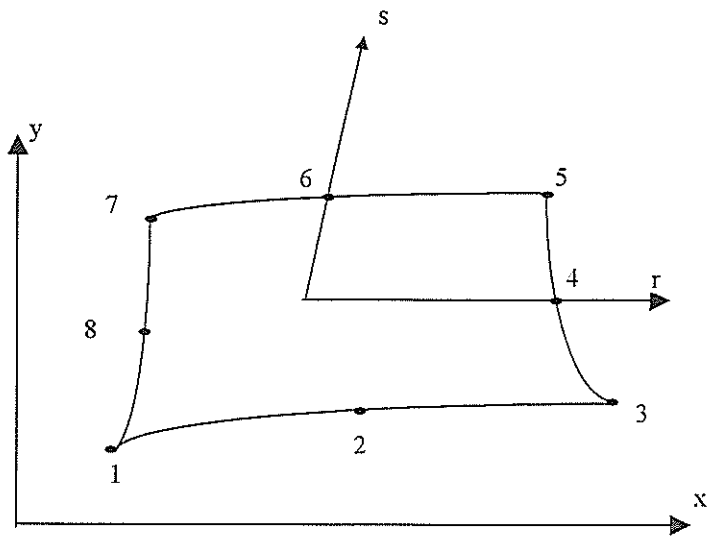
olur. (3.46) ve (5.4) nolu denklemlerden gerekli eşitlikler yerlerine konulursa, yukarıdaki ifade,

$$U=\frac{1}{2}\iint\left(\{\kappa_c\}^T[C_f]\{\kappa_c\}+\{\phi\}^T[C_s]\{\phi\}\right)dA \tag{5.12}$$

şeklinde olur.

5.2. Sekiz Noktalı İzoparametrik Eleman

Sekiz noktalı izoparametrik elemanın hassasiyet derecesi daha iyi olduğu için sonlu eleman formülasyonunda sekiz nokta tercih edildi. İlk olarak plakların sayısal olarak çözümü için sekiz noktalı çözümü Hinton ve Owen uygulamıştır[19].



Şekil 5.1. Sekiz noktalı izoparametrik eleman.

Şekil 5.1. de sekiz noktalı izoparametrik eleman görülmektedir. Eleman sekiz noktaya sahiptir ve problem düzlem elemanın gerileme/şekil değiştirme problemine indirgenmiştir. Burada elemanın geometrisi ve yer değiştirmelerini formülize eden şekil fonksiyonları Tablo 4.1'de verilmiştir.

5.2.1. Gerilme ve Şekil Değiştirmelerin Sonlu Eleman Formülasyonu

Elemanın herhangi bir noktasının yer değiştirmeleri, çökmeyi gösteren w ile x ve y ekseni etrafındaki dönmeleri gösteren θ_x ve θ_y dir. Noktasal yer değiştirme vektörü ise,

$$\{\delta\}^T = \left[w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ldots w_8 \ \theta_{8x} \ \theta_{8y} \right] \tag{5.13}$$

dir. İzoparametrik yaklaşım kullanılarak r-s düzlemindeki noktalar şekil fonksiyonları kullanılarak x-y düzlemindeki noktalara dönüştürülürse,

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{8} N_i y_i \qquad (5.14)$$

burada sekiz nokta için şekil fonksiyonları ,

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-r)(1-s)(1+r+s) \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1-r+s) \qquad N_4 = \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) \qquad (5.15)$$

$$N_5 = -\frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-r-s) \qquad N_6 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1+r-s) \qquad N_8 = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)$$

dir.

Bir elemandaki yer değiştirmeleri hesaplamak için yukarıdaki şekil fonksiyonları kullanılır.

$$w = \sum_{i=1}^{8} N_i w_i$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{8} N_i \theta_{xi} \qquad (5.16)$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^{8} N_i \theta_{yi}$$

Lokal ve global eksenlere göre şekil fonksiyonların türevlerini hesaplamak için Jakobyen matrisi,

$$[J]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

olarak ifade edilir. Global eksenlere göre türevler, lokal eksenlere göre alınan türevlerin Jakobyen matrisinin tersi ile çarpılması sonucu elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial s} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

5.2.2. Elemanın Direngenlik Matrisinin Hesaplanması

Bir elemanın eğim ve kayma şekil değişimi $\{\varepsilon\}_p$ ile noktasal yer değiştirmeler $\{\delta\}$ arasındaki bağıntı,

$$\{\varepsilon\}_p=[B]\ \{\delta\}\ , \qquad \{\varepsilon\}_p=\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

şeklinde ifade edilir. (5.16) nolu denklemin x ve y' ye göre türevi alınırsa eğim ve kayma şekil değişimleri şekil fonksiyonları içerisindeki noktasal yer değiştirme terimleri cinsinden ifade edilebilir. Böylece ,

$$\kappa_x = \sum_{i=1}^{8} \theta_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$\kappa_y = -\sum_{i=1}^{8} \theta_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$\kappa_{xy} = \sum_{i=1}^{8} \theta_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \sum_{i=1}^{8} \theta_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \qquad (5.20)$$

$$\phi_x = \sum_{i=1}^{8} w_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{8} \theta_{yi} N_i$$

$$\phi_y = \sum_{i=1}^{8} w_i \frac{\partial N_i}{\partial y} - \sum_{i=1}^{8} \theta_{xi} N_i$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ ve $\frac{\partial N_i}{\partial y}$, (5.18) eşitliğinde verilmiştir.

(5.20) eşitliğindeki ifadeler (5.19) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\{\varepsilon\}_p = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ w_8 \\ \theta_{x8} \\ \theta_{y8} \end{Bmatrix} \qquad (5.21)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\{\varepsilon\}_p = \sum_{i=1}^{8} [B_i]\{\delta_i\} \tag{5.22}$$

olur. Burada $[B_i]$ ve $\{\delta_i\}$ ifadeleri;

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

$$\text{ve} \quad \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

şeklindedir.

$\{\sigma\}_p$ gerilmeleri,

$$\{\sigma\}_p = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [C]_p \{\varepsilon\}_p = [C]_p \sum_{i=1}^{8} [B_i]\{\delta_i\} \tag{5.25}$$

olur. Burada $[C]_p$ (5.6) eşitliği ile hesaplanır. N_i 'in x ve y ' ye göre türevleri (5.18) eşitliğinde verilmiştir.

Bir elemanın direngenlik matrisi ise,

$$[k] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[B]^T[C]_p[B]\,|J|\;dr\;ds \tag{5.26}$$

şeklinde hesaplanır.

Direngenlik matrisini hesaplamada Gauss formülleri kullanılmaktadır. İnce plaklar için indirgenmiş 2 x 2 Gauss integrasyon tekniğinin kullanılması daha sağlıklı sonuçlar verir.

5.2.3. Elemanın Noktasal Yük Vektörü

Düzgün yayılı q yükü için herhangi bir i noktasına gelen $\{Q_i\}$ noktasal yükü,

$$\{Q_i\} = \begin{Bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_i = \iint N_i \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} |J|\;dr\;ds \tag{5.27}$$

şeklinde hesaplanır.

Sekiz noktalı elemanın yük vektörü aşağıda verildiği gibi nümerik integrasyon kullanılarak hesaplanır.

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ Q_{22} \\ Q_{23} \\ Q_{24} \end{Bmatrix} = q \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} W_i \, W_j \, |J| \begin{Bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ N_8 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

5.2.4. Tabakalı Plağın Sonlu Eleman Formülasyonu

Çok tabakalı bir plağın bir katmanındaki şekil değiştirmeler plağı orta düzleminin eğriliği ve doğrudan şekil değiştirme terimleriyle ifade edilebilir.

$$\{\varepsilon_k\} = \{\varepsilon_k^0\} + z\{\kappa_k\} \tag{5.29}$$

$$\{\sigma_k\} = [\overline{Q}]\{\varepsilon_k^0\} + [\overline{Q}]\{\kappa_k\} \tag{5.30}$$

Genellikle tabakalı kompozit plağın kalınlığı boyunca gerilme değişimi doğrusal değildir. Gerilmeler iki katmanın ara yüzeyinde süreksizdir ve iki birleştirilmiş katman içinde dahi farklıdır. Çok tabakalı bir kompozit için gerilme-şekil değiştirme bağıntıları plağın tüm katmanlarının süreklilik özelliğinden faydalanarak türetilebilir. Böylece katmanların tümü tek bir levha kabul edilerek, sonlu eleman yöntemiyle modellenebilir Çünkü çok tabakalı kompozit plağın malzeme özellikleri her eleman için elastiklik modülü matrisi içerisinde tam olarak ifade edilebilir. Bu matrisler, çok tabakalı kompozit plağın her bir tabakasının takviye açısı, malzeme özelikleri ve kalınlığı biliniyorsa hesaplanabilir. Eşitlik (5.30) tek bir tabakanın kesiti üzerinde integre edilir ve tekrar çok tabakalı plağın kalınlığı boyunca integral işlemi yapılırsa elastiklik modülü matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hline B & D \end{array}\right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_{xy}^o \\ \hline \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

n tabakalı düzgün kalınlıklı plakta alt matrisler aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$[A] = \int_{-t/2}^{-t/2+t/n} [\overline{Q}]_1 dz + \int_{-t/2+t/n}^{-t/2+2t/n} [\overline{Q}]_2 dz + \ldots + \int_{-t/2+(n-1)t/n}^{t/2} [\overline{Q}]_n dz \tag{5.32}$$

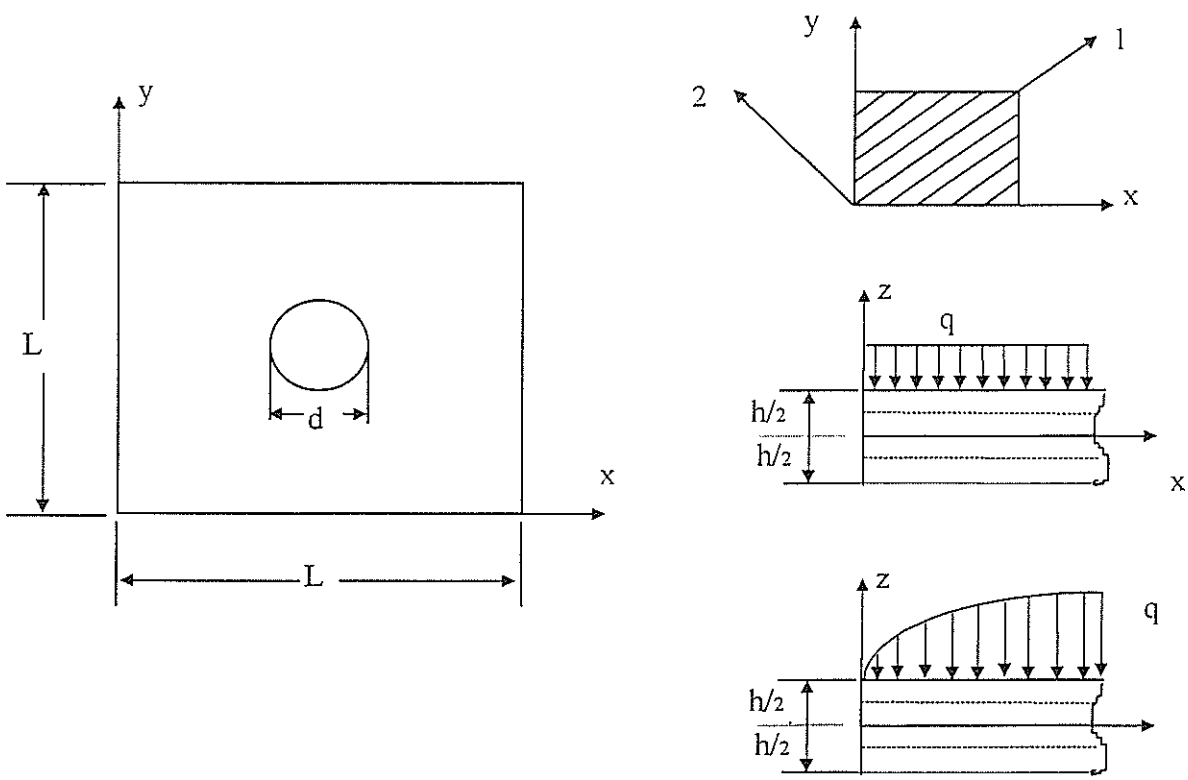
$$[B] = \int_{-t/2}^{-t/2+t/n} [\overline{Q}]_1 (-z)\, dz + \int_{-t/2+t/n}^{-t/2+2t/n} [\overline{Q}]_2 (-z)\, dz + \ldots + \int_{-t/2+(n-1)t/n}^{t/2} [\overline{Q}]_n (-z) dz \tag{5.33}$$

$$[D] = \int_{-t/2}^{-t/2+t/n} [\overline{Q}]_1 z^2\, dz + \int_{-t/2+t/n}^{-t/2+2t/n} [\overline{Q}]_2 z^2\, dz + \ldots + \int_{-t/2+(n-1)t/n}^{t/2} [\overline{Q}]_n z^2\, dz \tag{5.34}$$

Çok tabakalı kompozit plakta sonlu eleman çözümü için temel matris elastiklik modülü matrisidir ve sonradan sonlu eleman çözümü için direngenlik matrisi oluşturulur. Önce elastiklik modülü matrisi oluşturulduktan sonra, gerilme analizi için bilinen sonlu eleman çözüm yöntemi aynı şekilde uygulanır.

6.PROBLEMİN TANIMI

Bu çalışmada izotropik ve ortotropik, tek tabakalı ve çok tabakalı, delikli ve deliksiz olmak özere farklı özelliklerde modeller kullanılmıştır. Bütün modellerde plakın uzunluğu ve genişliği birbirine eşit kare eleman kullanılmıştır. Çok tabakalı plaklar orta yüzeye göre simetrik seçilmiştir. Plak koordinatları için Kartezyen koordinatlar kullanılmış olup düzlem koordinatlar x-y ile ve kalınlık doğrultusundaki koordinat ise z ile gösterilmiştir (Şekil 6.1).



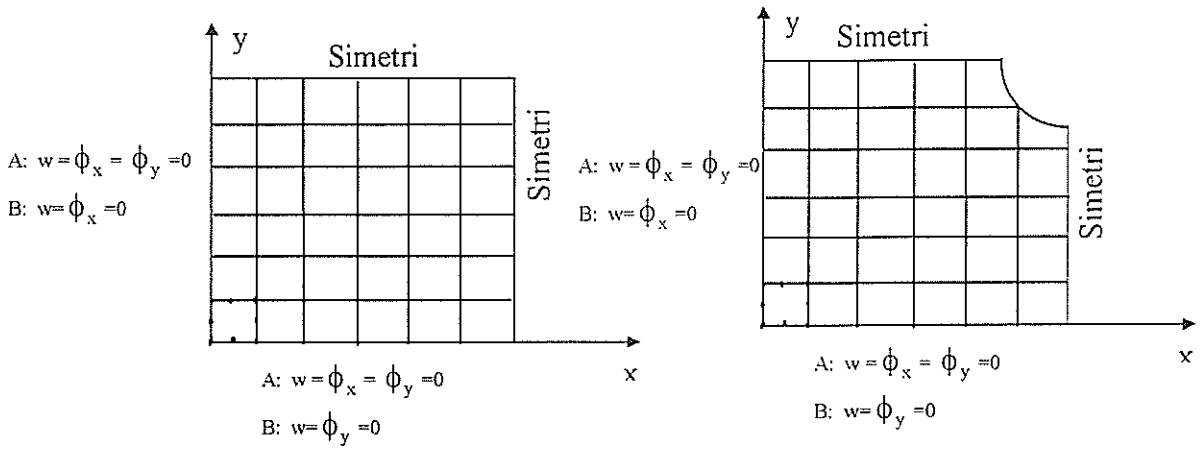
Şekil 6.1. Geometri, koordinatlar ve yüklemeler.

Plak, geometri ve malzeme özellikleri bakımından simetrik olduğundan sonlu eleman formülasyonunda plağın ¼ ' ü kullanılmıştır. Basit mesnet ve ankastre sınır şartları (Şekil 6.2) kullanılarak plak merkezine etki eden tek yük, düzgün yayılı yük ve sinüzoidal yayılı yük halleri için gerilme analizi yapılmıştır. Takviye açısının gerilme analizi üzerindeki

etkisi incelenirken 0-90° arasındaki takviye açıları halinde plak simetrik olmayacağı için ¼ plak yerine tam plak kullanılmıştır.

Çalışmada kullanılan malzemelerin elastik özellikleri referans [5] ve [21]' e göre Tablo 6.1'de verilmiştir.

Sonuçlar 7. Bölümde tablolar ve grafikler şeklinde gösterilmiştir.



A: Ankastre sınır şartı
B: Basit mesnetli sınır şartı

Şekil 6.2. Sınır şartları ve elemanlara bölme.

Tablo 6.1. Çeşitli kompozit malzemelere ve çeliğe ait elastik özellikler.

	Çelik(GPa)	Cam/Epoksi (GPa)	Grafit/Epoksi (GPa)	Boron/Polimid(GPa)
E_1	200	53.8	219	174.6
E_2	200	18	7	7
G_{12}	76.92	9	6.62	3.5
G_{13}	76.92	9	6.62	3.5
G_{23}	76.92	9	6.62	1.4
ν_{12}	0.3	0.25	0.31	0.25

7.SONUÇLAR

Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, izotropik bir plakın değişik kalınlıklardaki maksimum çökmesi Tablo 7.1'de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Yapılan çalışmanın sonuçları referans [8] ve referans [24]' ün sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, ince plak çözümü yapan referans [24]'ün sonuçlarından sapma gösterirken kalın plak çözümü yapan referans [8]' in sonuçlarıyla uyum göstermektedir. Kalınlık arttıkça maksimum çökme düşmektedir.

Tablo 7.1. Basit mesnetli düzgün yayılı yüklü izotropik bir plakın değişik kalınlıklardaki maksimum çökmesinin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi ($\nu = 0.3$)

$$\alpha = \frac{W\max.E.h^3}{q.L^4} \quad , \quad W\max(L/2,L/2)$$

h/L	SEY	[8]	[24]
0.05	0.04473	0.0462	0.0443
0.20	0.05338	0.0588	0.0443
0.40	0.08099	0.0848	0.0443
0.60	0.12701	0.1224	0.0443
0.80	0.19144	0.1729	0.0443

Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, izotropik bir plakın değişik kalınlıklardaki maksimum momenti Tablo 7.2' de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Kalınlığın artmasıyla maksimum moment değişmemiştir.

Tablo 7.2. Basit mesnetli düzgün yayılı yüklü izotropik bir plakın değişik kalınlıklardaki maksimum momentinin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi ($\nu = 0.3$)

$$\beta = \frac{M\max}{q.L^2}$$

h/L	SEY	[8]	[24]
0.05	0.04770	0.0484	0.0479
0.20	0.04776	0.0535	0.0479
0.40	0.04776	0.0579	0.0479
0.60	0.04776	0.0597	0.0479
0.80	0.04776	0.0608	0.0479

Aynı özelliklere sahip plağın değişik kalınlıklardaki maksimum çökmesi Tablo 7.3' de farklı referanslarla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, ince plaklara kayma gerilmesi etkisini de katarak tam çözüm yapan Reissner'in sonuçlarıyla ve referans [19]'un sonuçlarıyla uyuşmaktadır. Kalınlık arttıkça çökme azalmaktadır.

Tablo 7.3. Basit mesnetli düzgün yayılı yüklü izotropik bir plakanın değişik kalınlıklardaki maksimum çökmesinin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi ($\nu = 0.15$)

$$\alpha = \frac{W\max.E.h^3}{q.L^4} \quad , \quad W\max(L/2,L/2)$$

h/L	SEY	CPT[24]	Reisner T.	[19]
0.05	0.04493	0.0443	0.04819	0.04816
0.10	0.04948	0.0443	0.04976	0.04968
0.15	0.05203	0.0443	0.05238	0.05222
0.20	0.05596	0.0443	0.05604	0.05578
0.25	0.06018	0.0443	0.06076	0.06036

Basit mesnetli, izotropik bir plakın sinüzoidal yayılı yük altındaki maksimum çökme ve momenti Tablo 7.4' de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Çökme sonuçları kalın plak çözümü yapan referans [8]' in sonuçlarına çok yakın çıkmasına rağmen ince plak çözümü yapan referans [24]' ün sonuçlarından kalınlık arttıkça sapma göstermektedir. Moment sonuçları ise kalınlık arttıkça referans [8]'in sonuçlarından sapma gösterirken, referans [24]'ün sonuçları ile uyumlu olduğu gözlenmektedir.

Tablo 7.4. Basit mesnetli sinüzoidal yayılı yüklü izotropik bir plakın değişik kalınlıklardaki maksimum çökme ve momentinin boyutsuz katsayılarla ile gösterilmesi ($\nu = 0.25$)

$$q = q_o \sin \pi x/a . \sin \pi y/b$$

	$Wmax.E.h^3/q.L^4$			$Mmax/q.L^2$		
h/L	SEY	[8]	[24]	SEY	[8]	[24]
0.005	0.02864	0.02891	0.02887	0.03114	0.03286	0.03166
0.01	0.02872	0.02892	0.02887	0.03125	0.03287	0.03166
0.02	0.02880	0.02896	0.02887	0.03135	0.03291	0.03166
0.05	0.02916	0.02925	0.02887	0.03149	0.03318	0.03166
0.2	0.03489	0.03435	0.02887	0.03157	0.03583	0.03166
0.4	0.05316	0.04988	0.02887	0.03157	0.03893	0.03166
0.6	0.08364	0.07308	0.02887	0.03158	0.04149	0.03166
0.8	0.12635	0.10015	0.02887	0.03158	0.04400	0.03166

Ankastre mesnetli düzgün yayılı yüklü izotropik bir plakın maksimum çökmesi Tablo 7.5' te boyutsuz katsayı ile gösterilmiştir. Sonuçlar referans [24], [8] ve referans [8]'deki diğer referanslarla uyuşmaktadır.

Tablo 7.5. Ankastre mesnetli düzgün yayılı yüklü izotropik bir plakın maksimum çökmesinin boyutsuz katsayı ile gösterilmesi ($\nu = 0.3$)

$$\alpha = \frac{W\max.E.h^3}{q.L^4} \quad , \quad \text{Wmax(L/2,L/2)}$$

h/L	SEY	[8]	[8][41]	[8][42]	[24]
0.02	0.013548	0.0152	0.0136	0.0139	0.0138

Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, tek tabakalı (cam-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentler Tablo 7.6' da boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar referans [21]'in sonuçlarıyla ve referans [21]'deki klasik laminasyon teorisi(CLT) ve sabit kayma açısı teorisine(CST) göre çözüm yapan referansların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Tablo 7.6. Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü , tek tabakalı (cam-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentlerin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi.

$$\alpha = \frac{W(L/2,\ L/2).\frac{h^3}{12}\left[\nu_{12}.E_2/\left(1-\nu_{12}.\nu_{21}\right)+2.G_{12}\right]}{q.L^4}$$

$$\beta_1 = \frac{M_x\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2}, \quad \beta_2 = \frac{M_y\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2}$$

	SEY	[21]	CLT[21][22]	CST[21][24]
$\alpha.10^3$	3.20978	3.2046	3.0876	3.1400
$\beta_1\ 10^2$	7.47821	8.3607	7.628	-
$\beta_2.10^2$	2.78256	2.9732	2.7556	-

Benzer şekilde aynı özelliklere sahip (grafit-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentler Tablo 7.7' de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar aynı referanslarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 7.7. Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü , tek tabakalı (grafit-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentlerin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi.

$$\alpha = \frac{W(L/2,\ L/2).\frac{h^3}{12}\left[\nu_{12}.E_2/\left(1-\nu_{12}.\nu_{21}\right)+2.G_{12}\right]}{q.L^4}$$

$$\beta_1 = \frac{M_x\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2},\quad \beta_2 = \frac{M_y\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2}$$

	SEY	[21]	CLT[21][22]	CST[21][24]
$\alpha.10^4$	10.05524	9.1833	9.200	9.225
$\beta_1.10$	1.259171	1.2642	1.2659	-
$\beta_2.10^3$	3.568156	3.197	3.271	-

Ankastre mesnetli, düzgün yayılı yüklü, tek tabakalı (cam-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentler Tablo 7.8' de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar referans [21] ve referans [21]'deki diğer referansların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Tablo 7.8. Ankastre mesnetli, düzgün yayılı yüklü , tek tabakalı (cam-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentlerin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi.

$$\alpha = \frac{W(L/2,\ L/2).\frac{h^3}{12}\left[\nu_{12}.E_2/\left(1-\nu_{12}.\nu_{21}\right)+2.G_{12}\right]}{q.L^4}$$

$$\beta_1 = \frac{M_x\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2},\quad \beta_2 = \frac{M_y\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2}$$

	SEY	[21]	Gopalsamy [21][20]	Reddy-Gera [21][21]	Reddy [21][22]
$\alpha.10^4$	8.57413	8.479	8.456	8.388	8.612
$\beta_1\ 10^2$	3.30318	3.363	3.357	3.419	3.66
$\beta_2.10^2$	1.11760	1.1	1.1	1.114	1.124

Benzer şekilde aynı özelliklere sahip tek tabakalı (grafit-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentler Tablo 7.9'de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar aynı referansların sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve birbirine yakın çıkmıştır.

Tablo 7.9. Ankastre mesnetli, düzgün yayılı yüklü, tek tabakalı (grafit-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentlerin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi.

$$\alpha = \frac{W(L/2,\ L/2).\frac{h^3}{12}\left[\nu_{12}.E_2/\left(1-\nu_{12}.\nu_{21}\right)+2.G_{12}\right]}{q.L^4}$$

$$\beta_1 = \frac{M_x\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2},\quad \beta_2 = \frac{M_y\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2}$$

	SEY	[21]	Gopalsamy [21][20]	Reddy-Gera [21][21]	Reddy [21][22]
$\alpha.10^4$	2.20652	1.886	1.891	1.878	1.903
$\beta_1\,10^2$	4.32507	4.316	4.323	4.363	4.412
$\beta_2.10^3$	0.69766	0.546	0.566	0.383	0.481

Basit mesnetli, plaka merkezine tek yük etki eden, tek tabakalı (cam-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentler Tablo 7.10' de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar referans [21] ve referans [21]' de sonlu farklar yöntemiyle çözüm yapan referansın sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Tablo 7.10. Basit mesnetli, plaka merkezine tek yük etki eden , tek tabakalı (cam-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentlerin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi.

$$\alpha = \frac{W(L/2,\ L/2).\frac{h^3}{12}\left[\nu_{12}.E_2/\left(1-\nu_{12}.\nu_{21}\right)+2.G_{12}\right]}{P.L^2}$$

$$\beta_1 = \frac{M_x\left(L/2,\ L/2\right)}{P},\quad \beta_2 = \frac{M_y\left(L/2,\ L/2\right)}{P}$$

	SEY	[21]	FD[21][21]	FE[21][22]
$\alpha.10^3$	11.5946	9.3028	8.802	9.0288
$\beta_1\,10$	5.14563	5.5886	5.258	5.678
$\beta_2.10$	2.61192	2.7509	2.572	2.830

Benzer şekilde aynı özelliklere sahip tek tabakalı (grafit-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentler Tablo 7.11'de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar aynı referansların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Tablo 7.11. Basit mesnetli, plaka merkezine tek yük etki eden , tek tabakalı (grafit-epoksi) ortotropik plakta plak merkezindeki çökme ve momentlerin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi.

$$\alpha = \frac{W(L/2,\ L/2).\frac{h^3}{12}\left[\nu_{12}.E_2/\left(1-\nu_{12}.\nu_{21}\right)+2.G_{12}\right]}{P.L^2}$$

$$\beta_1 = \frac{M_x\left(L/2,\ L/2\right)}{P},\quad \beta_2 = \frac{M_y\left(L/2,\ L/2\right)}{P}$$

	SEY	[21]	FD[21][21]	FE[21][22]
$\alpha.10^3$	4.8869	3.4962	3.1380	3.4674
β_1 10	8.8167	10.793	9.361	10.353
β_2.10	1.2247	1.3263	1.067	1.257

Basit mesnetli, sinüzoidal yayılı yüklü ortotropik tabakalı (0°/90°/90°/0°) plakta plakın farklı kalınlıklardaki maksimum çökmesi ve farklı noktalardaki gerilmeleri Tablo 7.12'de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar analitik çözümün sonuçlarıyla, Redy'nin yüksek mertebe teorisini kullanarak bulduğu sonuçlarla ve Redy'nin birinci mertebe teorisini kullanarak bulduğu sonuçlarla mukayese edilmiştir. Sonuçlar özellikle Redy'nin birinci mertebe teorisine göre bulduğu sonuçlara çok yakın çıkmıştır.

Tablo 7.12. Basit mesnetli sinüzoidal yayılı yüklü ortotropik tabakalı (0°/90°/90°/0°) plakın değişik kalınlıklardaki maksimum çökme ve farklı noktalardaki gerilmelerin boyutsuz katsayılarla gösterilmesi.

$\bar{w}=\left(\frac{wh^3E_2}{q_0a^4}\right)x100$, $w=w(a/2, b/2)$; $\bar{\sigma}_1=\sigma(a/2, b/2, h/2)\frac{h^2}{q_0a^2}$

$\bar{\sigma}_2=\sigma(a/2, b/2, h/4)\frac{h^2}{q_0a^2}$; $\bar{\tau}_{xy}=\tau_{xy}(0, 0, h/2)\frac{h^2}{q_0a^2}$

a/h	Literatür	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	Elastisite [5][17]	1.954	0.720	0.663	0.0467
	Redy [5]	1.8937	0.6651	0.6322	0.0440
	FSDT[5][18]	1.7100	0.4059	0.5765	0.0308
	SEY	1.8539	0.4299	0.6874	0.0288
10	Elastisite [5][17]	0.743	0.559	0.401	0.0275
	Redy [5]	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268
	FSDT[5][18]	0.6628	0.4989	0.3615	0.0241
	SEY	0.6777	0.5022	0.4050	0.0257
20	Elastisite [5][17]	0.517	0.543	0.308	0.0230
	Redy [5]	0.5060	0.5393	0.3043	0.0228
	FSDT[5][18]	0.4912	0.5273	0.2957	0.0221
	SEY	0.4941	0.5268	0.3084	0.0219
100	Elastisite [5][17]	0.4385	0.539	0.276	0.0216
	Redy [5]	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213
	FSDT[5][18]	0.4337	0.5382	0.2705	0.0215
	SEY	0.4329	0.5348	0.2686	0.0213

Ankastre mesnetli, düzgün yayılı yüklü anizotropik plakta, takviye açısına bağlı olarak farklı kalınlıklardaki maksimum çökme ve momentler Tablo 7.13' de gösterilmiştir. 45° takviye açısında en az çökmenin oluştuğu gözlenmiştir.

Tablo 7.13. Ankastre mesnetli düzgün yayılı yüklü anizotropik bir plakta takviye doğrultusuna bağlı olarak maksimum çökme ve momentlerin değişimi.

$$\alpha = \frac{W\,max.E_2.h^3}{q.L^4}, \quad Wmax\ (L/2,L/2)$$

$$\beta_1 = \frac{M_x\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2}, \quad \beta_2 = \frac{M_y\left(L/2,\ L/2\right)}{q.L^2}$$

h/L		$\theta=0^0$	$\theta=30^0$	$\theta=45^0$	$\theta=60^0$	$\theta=90^0$
0.1	$\alpha.10^2$	0.115036	0.112834	0.112107	0.112834	0.115036
	$\beta_1 10^2$	0.58814	0.52342	0.458069	0.39437	0.32992
	$\beta_2.10^2$	0.32992	0.39437	0.458069	0.523424	0.58814
0.2	$\alpha.10^2$	0.31945	0.31599	0.314776	0.31599	0.31945
	$\beta_1 10^2$	0.397102	0.422744	0.44829	0.422744	0.397102
	$\beta_2.10^2$	0.514497	0.479080	0.44829	0.479080	0.514497

Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, delikli ortotropik tabakalı (0°/90°/90°/0°) plakta delik çapına bağlı olarak plak merkezindeki maksimum çökme Tablo 7.14'de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Sonuçlar ANSYS paket programının sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Delik çapı arttıkça maksimum çökme önce artıyor, daha sonra da azalıyor.

Tablo 7.14. Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, delikli, ortotropik (cam-epoksi) tabakalı (0°/90°/90°/0°) plakta plak merkezindeki maksimum çökmenin delik çapına bağlı olarak değişimi (h/L=0.2).

$$\alpha = \frac{W\,max.E_2.h^3}{q.L^4}$$

D/L	SEY	ANSYS
0.10	0.04013	0.03904
0.15	0.04061	0.04112
0.20	0.04240	0.04210
0.25	0.04206	0.04196

Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, delikli, tek tabakalı ortotropik bir plakta delik çapına bağlı olarak değişen maksimum çökme, moment ve plak merkezinin ortayüzeyindeki gerilmeler Tablo 7.15'de boyutsuz katsayılarla gösterilmiştir. Delik çapı arttıkça bu değerlerin tümü önce arttığı sonra da azaldığı tespit edilmiştir.

Tablo 7.15. Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, delikli, tek tabakalı ortotropik (cam-epoksi) bir plakta maksimum çökme, moment ve gerilmelerin delik çapına bağlı olarak değişimi.

$$\alpha = \frac{W\,max.E_2.h^3}{q.L^4}, \qquad \mu_1 = \sigma_{xmax}(a/2, b/2, h/2)\frac{h^2}{q_o a^2}$$

$$\beta_1 = \frac{M_{xmax}}{q.L^2}, \qquad \beta_2 = \frac{M_{ymax}}{q.L^2} \qquad \mu_2 = \sigma_{ymax}(a/2, b/2, h/2)\frac{h^2}{q_o a^2}$$

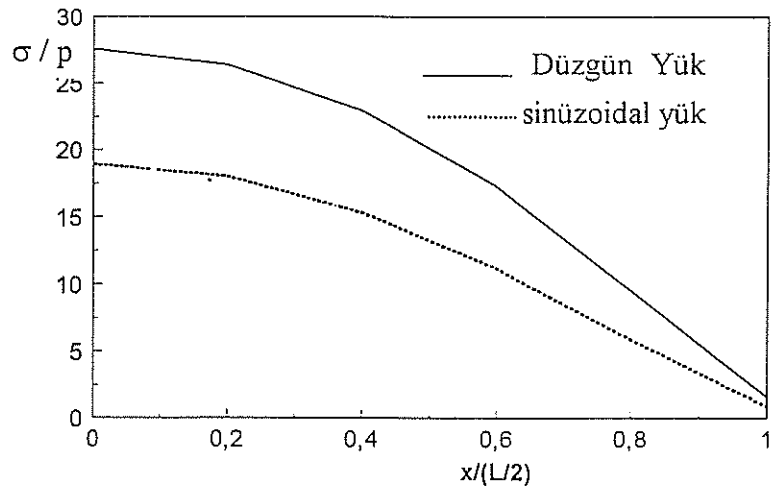
D/L	α	β_1	β_2	μ_1	μ_2
0.10	0.032973	0.125448	0.043989	0.75269	0.263934
0.15	0.034077	0.131732	0.045763	0.79039	0.27458
0.20	0.034826	0.131820	0.045160	0.79092	0.27096
0.25	0.035005	0.128031	0.042983	0.76818	0.25789

Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, delikli, ortotropik tabakalı (0°/90°/90°/0°) plakta maksimum çökme ve momentlerin delik çapı ve kalınlığa bağlı olarak değişimi Tablo 7.16' da gösterilmiştir.

Tablo 7.16. Basit mesnetli, düzgün yayılı yüklü, delikli, ortotropik (cam-epoksi) tabakalı (0°/90°/90°/0°) plakta maksimum çökme ve momentlerin delik çapı ve kalınlığa bağlı olarak değişimi.

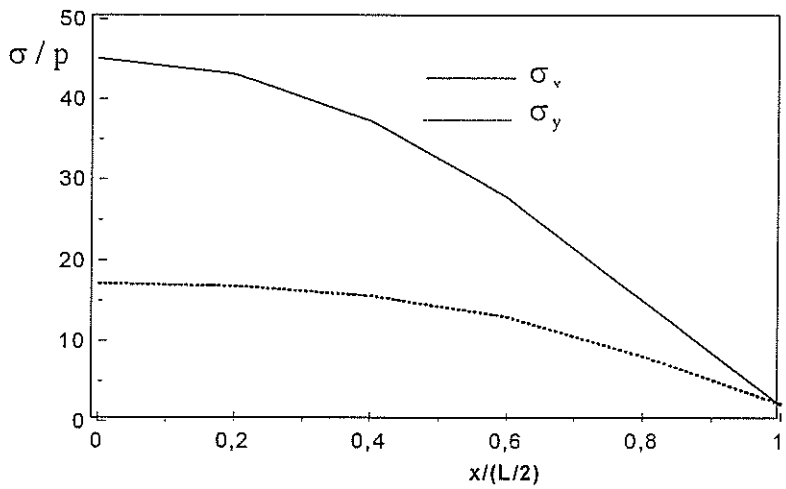
$$\alpha = \frac{W\,max.E_2.h^3}{q.L^4}, \qquad \beta_1 = \frac{M_{xmax}}{q.L^2}, \qquad \beta_2 = \frac{M_{ymax}}{q.L^2}$$

D/L	h/L	α	β_1	β_2
0.1	0.05	0.031094	0.115108	0.05586
	0.1	0.032912	0.115265	0.05417
	0.2	0.039342	0.114235	0.05383
	0.4	0.064324	0.106462	0.05899
0.2	0.05	0.030082	0.121108	0.05754
	0.1	0.034712	0.121043	0.05616
	0.2	0.040524	0.119864	0.05467
	0.4	0.062768	0.113066	0.05774



Şekil 7.1. İzotropik bir tabakada düzgün ve sinüzoidal yayılı yük altında x-ekseni boyunca σ_x gerilme dağılımı.

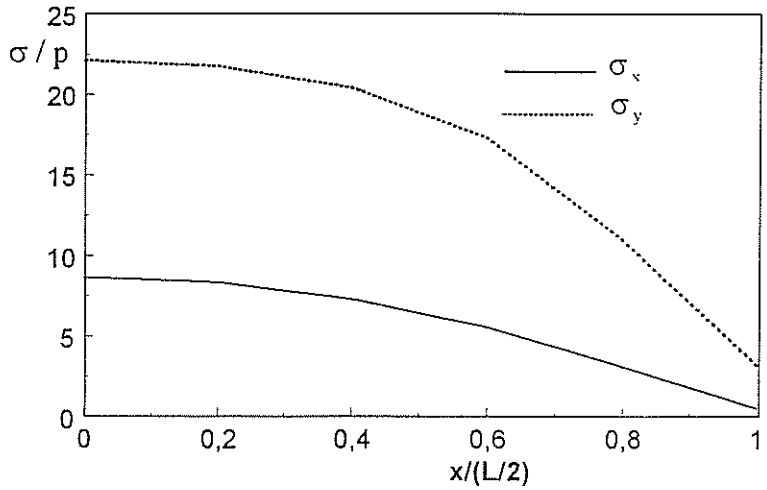
İzotropik, düzgün yayılı ve sinüzoidal yayılı yük altındaki bir plakta oluşan σ_x gerilmelerin x-ekseni boyunca dağılımı Şekil 7.1'de gösterilmiştir. Gerilmeler merkezde maksimum, kenarlara yaklaştıkça giderek azalmıştır. Ayrıca sinüzoidal yükleme altında gerilmeler daha düşük çıkmıştır.



Şekil 7.2. Deliksiz plakta 1. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y elastik gerilme dağılımı (cam-epoksi).

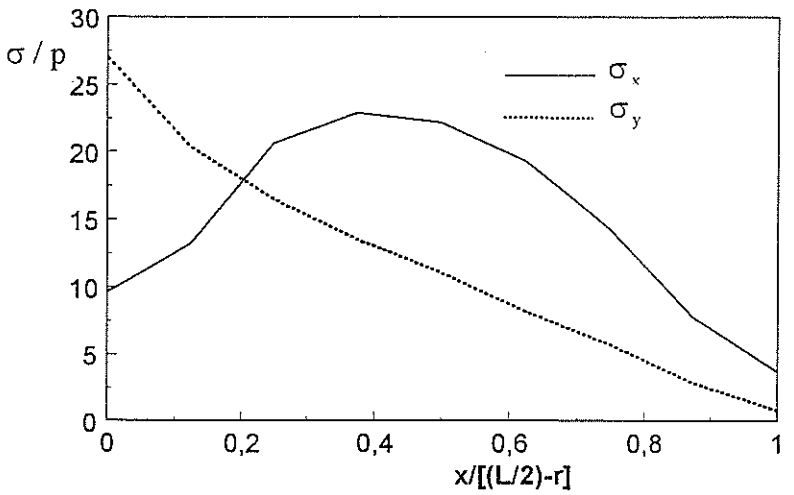
Deliksiz tabakalı plakta 1. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y elastik gerilme dağılımı Şekil 7.2'de gösterilmiştir. 1.tabakadaki σ_x ve σ_y elastik gerilmeleri aynı

karakterli olup σ_y gerilmeleri daha düşüktür. Gerilmeler merkezde maksimum çıkmış, plak kenarlarına yaklaştıkça giderek azalmıştır.



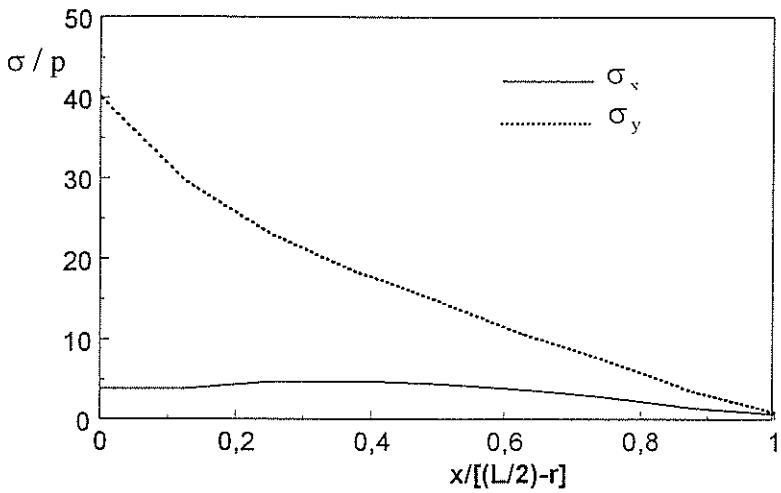
Şekil 7.3. Deliksiz plakta 2. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y elastik gerilme dağılımı (cam-epoksi).

Deliksiz plakta 2. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y elastik gerilmelerin dağılımı Şekil 7.3'de gösterilmiştir. 2. tabakadaki σ_y gerilmeleri, σ_x gerilmelerinden daha büyük çıkmıştır.



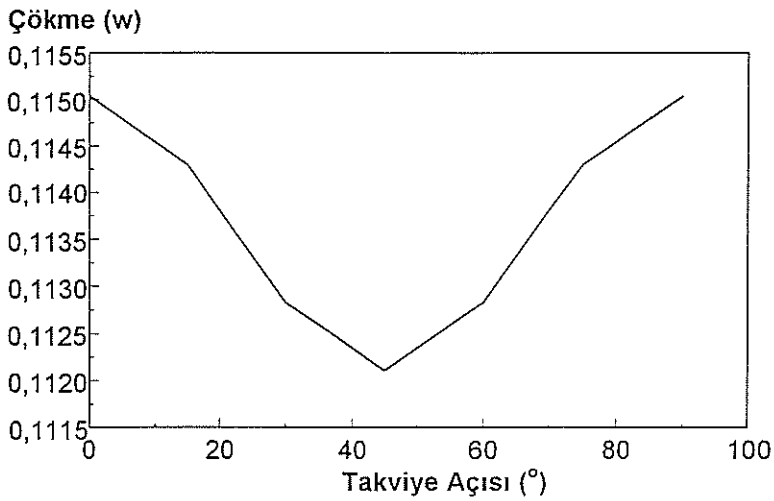
Şekil 7.4. r =10 mm için delikli plakta 1. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y elastik gerilme dağılımı (cam-epoksi).

10 mm yarıçaplı delikli, tabakalı plakta 1. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y elastik gerilme dağılımı Şekil 7.4'de gösterilmiştir. σ_x gerilmesi, plak merkezinden kenarlara yaklaştıkça önce arttığı sonrada azaldığı gözlenmiştir. σ_y gerilmesi de plak merkezinde maksimum olup kenarlara yaklaştıkça azalmıştır.



Şekil 7.5. r =10 mm için delikli plakta 2. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y elastik gerilme dağılımı (cam-epoksi).

10 mm yarıçaplı, delikli, tabakalı plakta 2. tabakadaki σ_x ve σ_y elastik gerilme dağılımı Şekil 7.5'de gösterilmiştir. Gerilmeler 1. tabakadaki gerilmelerle aynı karakterli olup σ_x daha küçük ve σ_y de daha büyük çıkmıştır.



Şekil 7.6. Anizotropik tek tabakalı bir plakta boyutsuzlaştırılmış maksimum çökmenin takviye açısına bağlı olarak değişimi.

Anizotropik, tek tabakalı bir plakta maksimum çökmenin takviye açısına bağlı olarak değişimi Şekil 7.6'da gösterilmiştir. En uygun takviye açısı 45° olarak tespit edilmiştir.

8.TARTIŞMA

Gerilme dağılımının hesabı için üç değişik kompozit ve bir izotropik malzeme üzerinde yazılan bilgisayar programı kullanılarak, bunların tek tabakalı ve çok tabakalı, delikli ve deliksiz durumları için elastik çözüm yapılmıştır. Yazılan bilgisayar programı sonuçları "SEY"(Sonlu Eleman Yöntemi) ile gösterilmiş ve literatür ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar genel kullanıma uygun olması için boyutsuzlaştırılarak gösterilmiştir.

Tablo 7.1-7.3 de izotropik tek bir tabaka için çözüm yapılmıştır. Sonuçlar h/L oranının düşük değerleri için referans [24]'ün ince plak çözüm sonuçları ile uyumlu olup, h/L oranının artan değerleri için sonuçlar referans [24]'ün sonuçlarından sapma göstermektedir. Bunun nedeni, yazılan bilgisayar programın sadece ince plak çözümü yapmayıp kalın plak çözümünü de yapabilmesidir. Zaten kayma gerilmelerin etkisini hesaba katarak çözüm yapan Reisner[3] ve referans [8]'in sonuçları ile SEY sonuçları birbirine yakın çıkmıştır.

Tablo 7.4-7.5 aynı çözümler basit mesnetli sinüzoidal yayılı yükleme ve ankastre mesnetli düzgün yayılı yükleme için yapılmıştır. Bu iki çözüm için de sonuçlar literatür ile uyuşmaktadır.

Tablo 7.6-7.9 de basit mesnetli-ankastre mesnetli sınır şartları ve cam/ epoksi- grafit/ epoksi ortotropik malzemeler için çözüm yapılarak maksimum çökme ve momentler referans [21]'in sayısal çözüm sonuçlarıyla ve referans [21]'de analitik çözüm yapan diğer referansların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar referanslardaki sonuçlara %96 yakın çıkmıştır.

Tablo 7.10-7.11' de ise farklı malzemeler ve plak merkezine etki eden tek yük hali için çözüm yapılmış, sonuçlar [21]'deki sonuçlara % 94 yaklaşmıştır.

Tablo 7.12' de sinüzoidal yüklü, orta yüzeye simetrik, çok tabakalı plakın değişik kalınlıkları için çözüm yapılmış ve sonuçlar analitik olarak yapılan çözümlerle karşılaştırılmıştır. Sonuçlar Reddy'nin birinci mertebe teorisini kullanarak bulduğu sonuçlara ortalama % 98 yakın çıkmıştır. Referansların sonuçları arsındaki fark kullanılan farklı teorilerden ve çözüm metotlarından kaynaklanmaktadır.

Tablo 7.13' de anizotropik, tek tabakalı bir plakta takviye doğrultusuna bağlı olarak maksimum çökme ve momentler araştırılmıştır. En uygun takviye açısının 45° olduğu sonucu elde edilmiştir. Daha sonra bu Şekil 7.6'da grafikle gösterilmiştir.

Tablo 7.14-7.16'da önce çok tabakalı delikli plakın farklı delik çapları için çözüm yapılmış ve sonuçlar ANSYS paket programından elde edilen sonuçlarla test edilerek doğrulanmış, daha sonra doğrulanan bilgisayar programı ile delik çapının gerilme etkisi araştırılmıştır. Yapılan çözümler sonucunda delik çapının artırılmasıyla maksimum çökmenin giderek arttığı, gerilmelerin ise önce arttığı daha sonra da azaldığı sonucu elde edilmiştir.

Şekil 7.1'de izotropik, tek tabakalı, düzgün yayılı ve sinüzoidal yayılı yüklü plakta x-ekseni boyunca σ_x gerilmelerin dağılımı gösterilmiştir. σ_y gerilme dağılımı, σ_x gerilme dağılımıyla yakın karakterli olduğundan dolayı ayrıca gösterilmemiştir. x/(L/2)=0' de moment maksimum olduğunda dolayı gerilmeler de maksimum çıkmış, x/(L/2)=1'e yaklaştıkça moment azaldığından dolayı gerilmeler de giderek azalmıştır. Plağa etki eden toplam yük, düzgün yayılı yükte, sinüzoidal yayılı yüke göre daha fazla olduğu için gerilmeler de düzgün yayılı yük halinde daha yüksek çıkmıştır.

Şekil 7.2'de deliksiz çok tabakalı plakta 1.tabakadaki, σ_x ve σ_y elastik gerilmelerin x-ekseni boyunca değişimi verilmiştir. Bu gerilmelerin çeki karakterli olduğu görülmektedir. Gerilmeler x/(L/2)=0'da maksimum değerini almakta, x/(L/2)=1'e doğru yaklaştıkça gerilme değeri önemli ölçüde azalmaktadır.

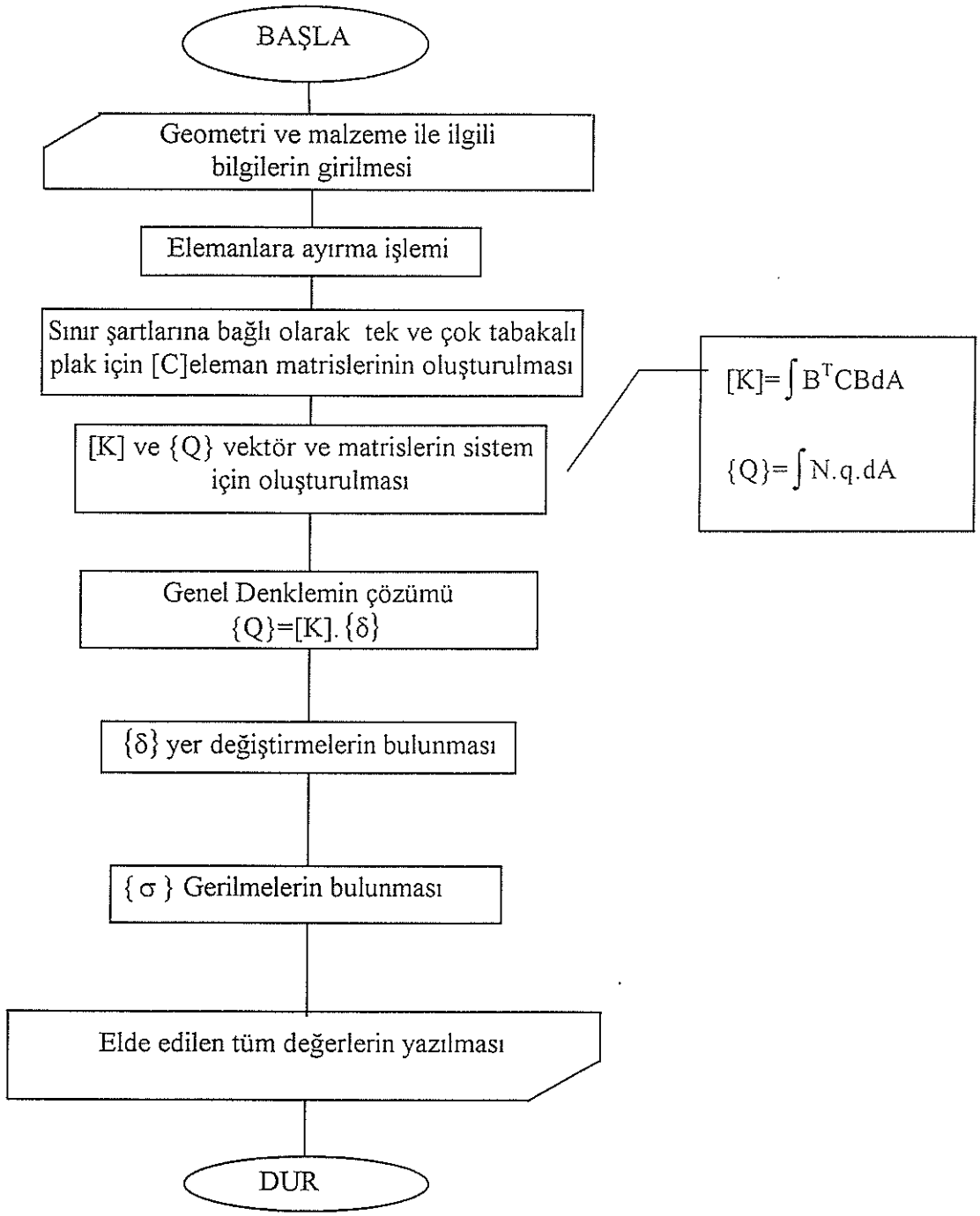
Şekil 7.3'de deliksiz çok tabakalı plakta 2. tabakadaki x-ekseni boyunca σ_x ve σ_y gerilmeleri gösterilmiştir. Gerilmeler daha küçük değerli olmakla birlikte, 2.tabakadaki σ_x gerilmeleri 1.tabakadaki σ_y gerilmeleriyle ve 2. tabakadaki σ_y gerilmeleri de 1. tabakadaki σ_x gerilmeleriyle yaklaşık olarak aynı karakteri göstermektedir.

Şekil 7.4'de delik yarıçapı r =10 mm olan plakta 1. tabakadaki, σ_x ve σ_y elastik gerilmelerin x-ekseni boyunca değişimleri gösterilmiştir. Gerilmelerin dağılımı incelendiğinde deliksiz plaktaki gerilme dağılımından tamamen farklı olduğu gözlenmektedir. σ_x gerilmelerin, delikli plakta, deliksiz plağın aksine x/(L/2)=0'da düşük değerde olduğu, x/(L/2)= 0.4'e yaklaştıkça giderek arttığı ve x/(L/2)= 0.4'te maksimuma ulaştığı, daha sonrada giderek azaldığı, x/(L/2)= 1'de minimum değere ulaştığı görülmektedir. Buna karşılık σ_y gerilmeleri x/(L/2)= 0'da maksimum değerde olup, x/(L/2)= 1'e doğru yaklaştıkça giderek azalmaktadır.

Şekil 7.5'de ise delik yarıçapı r = 10 mm olan plakta 2.tabakadaki, σ_x ve σ_y elastik gerilmelerin x-ekseni boyunca değişimleri gösterilmiştir. σ_x ve σ_y gerilmeleri 1.tabakadaki gerilmelerle aynı karakterli olup, σ_x daha düşük değerli olmasına karşılık, σ_y daha büyük değerli olduğu gözlenmektedir.

Yapılan çalışmada tek tabakalı ve orta düzleme göre simetrik çok tabakalı, üstten basınçlı plaklarda elastik gerilme analizi yapılmıştır. Orta düzleme göre simetrik olmayan çok tabakalı plaklarda, üstten basınçlı yük ile birlikte x ve y eksenleri doğrultusundaki yük halleri için elastik elasto-plastik ve plastik gerilme analizi yapılabilir.

Ek-1 Bilgisayar Programı Akış Şeması



KAYNAKLAR

1-Lo, K. H., Cristensen, R. M. and Wu, E. M.,1977, A Higher Order Theory of Plate Deformation, Part 1: Homogeneous Plates, J. Appl. Mech., 44, 663.

2-Lo, K. H., Cristensen, R. M. and Wu, E. M.,1977, A Higher Order Theory of Plate Deformation, Part 2: Laminated Plates, J. Appl. Mech., 44, 669.

3-Murthy, M. V. V., 1981, An Improved Transverse Shear Deformation Theory For Laminated Anisotropic Plates, NASA Tech. Paper.

4-Reissner, E., 1975, On Transverse Bending of Plates, Including The Effect of Transverse Shear Deformation, İnt. J. Solid. Struct., 11, 569.

5-Reddy, J. N., 1984, A Simple Higher Order Theory For Laminated Composite Plates, J. Appl. Mech., 51, 745.

6-Diaz-Contreras, R. E. and Nomura, S.,1996, Green's Function Applied to Solution of Mindlin Plates, Comput. Struct., 60, (1), 41-48.

7-Aköz, A. Y. and Uzcan (Eratlı), N., 1992, The New Functional For Reissner Plates and Its Application, Comput. Struct., 44, (5), 1139-1144.

8-Aköz, A. Y. and Uzcan (Eratlı), N., 1996, The Mixed Finite Element Formulation For Thick Plates on Elastic Foundations, Comput. Struct., 65, (4), 515-529.

9-Paul, T. K. and Rao, K. M., 1989, Stress Analysis Around Circular Holes in FRP Laminates Under Transverse Loading, Comput. Struct., 33, 929.

10-Paul, T. K. and Rao, K. M., 1989, Flexural Analysis of Laminated Composite Plates Containing to Elliptical Holes Using Higher Order Shear Deformation Theory, Comput. Struct., 55, (2), 279-285.

11-Ali, R., 1994, Use of Finite Element Technique For The Analysis of Composite Structures, Comput. Struct., 58, (5), 1015-1023.

12-Karakuzu, R., Özel, A., and Sayman, O., 1997, Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Metal Matrix Plates With Edge Notches, Comput. Struct., 63, (3), 551-558.

13-Bathe, K. J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall Inc., U.S.A

14-Huebner, K. H. and Thornton, E. A., 1982, The Finite Element Method For Engineers, A Wiley-Interscience Publication., Newyork.

15-Chandrupatla, T. R. and Belegundu, A. D., 1991, Introduction to Finite Element in Eng., Prentice-Hall Inc., U.S.A.

16-Ross, C. T. F., 1990, Finite Element Methods in Engineering Science, Ellis Horwood Ltd., London.

17-Ottosen, N. S. and Peterson, H., 1992, Introduction to The Finite Element Method, Prentice-Hall Inc., U.K.

18-Vinson, J. R. and Chou, T. W., 1975, Composite Materials and Their Use Their Use in Struct., Applied Science Publishers Ltd., London.

19-Krishnamoorthy, C. S., 1991, Fine Element Analysis-Theory and Programming, Tata McGraw-Hill Publishing Comp. Ltd., New Delhi.

20-Wung, P. M. and Reddy, J. N., 1990, A Transverse Deformation Theory of Laminated Composite Plates, Comput. Struct., 41, (4), 821-883.

21-Özçelikörs, Y., Omurtag, M. H. and Demir, H., 1997, Analysis of Ortotropic Plate-Foundation Interaction by Mixed Finite Element Formulation Using Gâteaux Differential, Comput. Struct., 62, (1), 93-106.

22-Librescu, L. and Reddy, J. N., 1989, A Few Remarks Concerning Several Refined Theories of Anisotropic Composite Laminated Plates, Int. J. Engng. Sci., 27, (5), 515-527.

23-Reddy, J. N., 1990, On Refined Theories of Composite Laminates, Meccanica, 25, 230-238.

24-Timoshenko, S. and Krieger, S. W., 1959, Theory of Plates and Shells, Mcgraw-Hill, New York.

25-Reddy, J. N., 1993, An Introduction to The Finite Element Method, McGraw-Hill İnternational Edition, Singapore.

26-Berktay, İ., 1992, Plak Teorisi ve Uygulamaları, Yıldız Üniv., İstanbul.

27-Sridhar, C. and Rao, K. P.,1995, Large Deformation Finite Element Analysis of Laminated Circular Composite Plates, Comput. and Struct., 54, 59-64.

28-Owen, D. R. and Figurerias, J. A., 1981, Anisotropic Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shells, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, 13, 321-330.

29-Karakuzu, R. and Sayman, R., 1994, Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Orthotropic Rotating Discs with Holes, Comput. and Struct., 51, 695-753.

30-Reddy, J. N. and Chandrashekhara, K., 1985, Nonlinear Finite Element Models of Laminated Plates and Shells, Proc. Int. Conf. Finite Element in Computational Mechanics, 189-209, Bombay.

31-Jong, T., 1981, Stresses Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates, J. Composite Materials, 15, 311-328.

32-Tripathy, B. and Rao, K. P., 1993, Stiffened Composite Axisymmetric Shells-Optimum Lay-u for Buckling by Ranking, Comput. and Struct., 46, 299-309.

33-Whitcomb, J. D., Raju, I. S. and Goree, J. G., 1982, Reliability of the Finite Element Method for Calculating Free Edge Stresses in Composite Laminates, Comput. And Struct., 15, 23-37.

34-ANSYS, Swanson Analysis Systems Inc., P.O. Box 65, Houston PA 15342

35-Donnell, D. H., Drucker, D. C. and Goodier, J. N.,1946, Discussion of on the Theory of Bending of Elastic Plates by Reissner, J. Appl. Mech., 13.

36-Salerno, V. L. and Goldberg, M. A., 1960, Effects of Shear Deformation on the Bending and Rectangular Plates, J. Appl. Mech., 27, 54-58.

37-Voyiadjis, G. Z., Baluch, M. H. and Chi, W. K., 1985, Effects of Shear and Normal Strain on Plate Bending, J. Eng. Mech. ASCE 111 (9), 1130-1143.

38-Craig, J., 1987, Finite Difference Solution of Reissner Plate Equations, J. Eng. Mec., 115, 31-48.

39-Ng, S. F. and Bencharif, N., 1991, On the Design and Analysis of Simple Supported and Clamped Thick Rectangular Plates, Comput. Struct., 38 (5/6), 589-596.

40-Smith, I. M., 1971, Discussion on Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates, by C. W. Pryor, J. Eng. Mec. Div. ASCE, 95 (EM4), 841-857.

41-Herrman, L. R., 1965, A Bending Analysis for Plates, Proc. Ist. Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, Ohio.

42-Greimann, L. F. and Lynn, P. O., 1970, Finite Element Analysis of Plate Bending with Transverse Shear Deformation, Nucl. Eng. Design, 11, 223-230.

43-Pryor Jr, C. W., Barber, R. M. and Frederick, D., 1970, Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates, J. Eng. Mec. Div. ASCE (EM 6), 967-983.

44-Kant, T., 1982, Numerical Analysis of Thick Plates, Comput. Meth. Appl. Mec. Eng., 31, 1-18.

45-Kant, T. and Hinton, E., 1983, Mindlin Plate Analysis by Segmentation Method,J. Eng. Mec., ASCE 109 (2), 537-556.

46-Pugh, E. D. L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O. C., 1978, A study of Quadrilateral Plate Bending Elements with reduced integration, İnt. J. Numer. Engng, 12, 1059-1079.